Der Entwicklungsübergang vom intuitiven additiven zum multiplikativen Verständnis: Zur Rolle der expliziten numerischen Fähigkeiten

Abhandlung
zur Erlangung der Doktorwürde
der Philosophischen Fakultät
der
Universität Zürich

vorgelegt von
Patricia Schär
von Wyssachen / BE

Angenommen im Herbstsemester 2012
auf Antrag von
Herrn Prof. Dr. Friedrich Wilkening und
Frau Prof. Dr. Elisabeth Moser Opitz

Zürich, 2013

Man kann einen Menschen nichts lehren,
man kann ihm nur helfen,
es in sich selbst zu entdecken.

Galileo Galilei

Zusammenfassung

Verschiedene Studien im Rahmen der Informationsintegrationstheorie haben gezeigt, dass nicht nur ein einzelner Reiz die Reaktion eines Menschen bestimmt, sondern dass sämtliche wichtigen Einflussgrössen nach einfachen algebraischen Regeln verknüpft und daraus Urteile und Handlungen generiert werden. Entstehen dabei Fehlurteile, so sind diese nicht auf die mangelnde kognitive Kapazität zur Erfassung sämtlicher Informationen zurückzuführen, sondern auf falsche Verknüpfungsregeln.

Bei der intuitiven Schätzung von Rechteckflächen kombinieren bereits kleine Kinder die Dimensionen Länge und Breite anhand einer mathematischen Regel. Im Entwicklungsverlauf werden diese beiden Informationen oft miteinander addiert statt multipliziert. Der Übergang von der additiven zur multiplikativen Verknüpfungsregel erfolgt meist zwischen 8 und 10 Jahren. In diesem Zeitraum wird unter anderem die Multiplikation im schulischen Unterricht eingeführt. Das Ziel dieser Studie war es daher, herauszufinden, ob dieses neu erworbene Wissen etwas mit dem Übergang zu tun haben könnte. Zum einen wurde untersucht, ob sich die intuitiven Verknüpfungsregeln durch die Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht verändern, andererseits ging es darum, welche Beziehung zwischen der Verwendung von Verknüpfungsregeln auf einem intuitiven Level und numerischen multiplikativen Fähigkeiten auf einem expliziten Level besteht. Mit einer Interventionsstudie wurde in einem weiteren Schritt die Stabilität und Veränderbarkeit der intuitiven Verknüpfungsregeln untersucht.

In der ersten empirischen Untersuchung schätzten 87 Kinder der zweiten Klasse die Grösse von verschiedenen Rechteckflächen, bevor und nachdem im schulischen Unterricht die Multiplikation eingeführt wurde. Zusätzlich wurden ihre numerischen multiplikativen Fähigkeiten mit einem Papier- und Bleistift-Test erhoben. Vor der Einführung der Multiplikation geschah dies mit Aufgaben zum kleinen Einmaleins, um zu überprüfen, ob bereits ein Vorwissen zur Multiplikation besteht. Nach der Einführung der Multiplikation wurde das numerische Wissen mit verschiedenen Typen von Multiplikationsaufgaben ermittelt. Für die darauffolgende Interventionsstudie wurden 102 Kinder der dritten Klasse untersucht. Dazu wurden die intuitiven Verknüpfungsregeln mit dem Experiment zur Schätzung der Rechteckflächen insgesamt dreimal erhoben: vor der Intervention, nach der

Intervention und eine Woche später. Die Intervention bestand aus vier verschiedenen Übungseinheiten, welche verschiedene Aspekte der Multiplikation beinhalteten.

Die Ergebnisse zeigten, dass das Erlernen der Multiplikation in der Schule in Bezug auf die intuitiven Verknüpfungsregeln keinen Effekt zu haben scheint. Die additiven Verknüpfungsregeln verbesserten sich zwar teilweise in multiplikative Regeln, oft blieben sie jedoch bestehen oder verschlechterten sich sogar. Die intuitiven Verknüpfungsregeln waren insgesamt nicht sehr stabil und veränderten sich eher aufgrund einer Vertrautheit mit der Aufgabensituation als aufgrund einer Intervention. Es konnte jedoch ein Zusammenhang zwischen den intuitiven Verknüpfungsregeln und dem numerischen Wissen der Multiplikation gefunden werden. Kinder mit einer korrekten intuitiven Verknüpfungsregel erbrachten insgesamt bessere Leistungen beim Lösen der Multiplikationsaufgaben. Je besser und stabiler das intuitive Wissen war, desto erfolgreicher konnte auch das explizite numerische Wissen in unbekannten Situationen angewendet werden. Am deutlichsten zeigte sich dies bei Aufgabentypen, die das Erkennen einer konstanten Beziehung zwischen zwei Zahlen erfordern (*one-to-many correspondence*). Auch scheint eine korrekte intuitive Verknüpfungsregel mit dem besseren Erkennen einer multiplikativen Struktur zusammenzuhängen. Aufgaben, welche eine Flächenstruktur beinhalten, wurden von Kindern mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel meistens direkt multiplikativ gelöst, während Kinder mit einer additiven Verknüpfungsregel oft die wiederholte Addition als Lösungsstrategie verwendeten.

Abstract

Various cognitive-developmental researches in the field of information integration theory have shown that human behavior is generally not determined by a single stimulus. Rather, judgments and actions have been found to follow systematic algebraic rules with respect to the relevant stimuli. Therefore, one could argue that the reason for false judgments does not lie in the lack of the cognitive capacity to grasp the relevant information but is due to false combination rules.

In judging intuitively the area of rectangles, even young children combine the dimensions lengths and widths following a mathematical rule. The normative multiplying rule of length x width, appears to be developmentally preceded by a simpler algebraic rule, usually the adding rule. A transfer from an adding to a multiplying combination rule seems to happen most likely between 8 and 10 years, which is the period when multiplication is taught at school. Therefore, the present study aimed at examining whether this newly acquired knowledge is transferred to the use of the intuitive rules. On the one hand, it was examined whether the intuitive rules changed after school-based learning of numeric multiplication. On the other hand, a focus was on the relationship between children's combination rules on an intuitive level and their numeric multiplication abilities on an explicit level. In a further study we tried to enhance a rule shift by different interventions.

In the first study, 87 second-graders were asked to estimate the size of rectangles before and after school-based treatment of multiplication. Additionally, children's numerical multiplicative abilities were assessed in a paper-and-pencil test. Before the initiation of multiplication in school single multiplication tasks were given to examine a pre-existing knowledge. After the multiplication lessons in school, the explicit multiplicative skills were examined using a test on different multiplication tasks. The following intervention study examined the intuitive combination rules of 102 third-graders three times. Each time they had to estimate the size of rectangles: before the intervention, immediately after the intervention, and in a posttest one week later. The interventions consisted of four different practice sessions concerning different aspects of multiplication.

The results showed that school-based learning of numeric multiplication does not seem to facilitate a shift from an intuitive additive combination rule into a multiplicative one.

Additive rules often persisted, or even shifted to a simplified rule, after formal instructions. Intuitive combination rules changed rather due to task familiarity than to an intervention. Further results, however, indicated a relationship between intuitive combination rules and numeric multiplication abilities. Children showing intuitive multiplication rules in area estimation perform better in solving numeric multiplication tasks. The better and more stable the intuitive knowledge, the more successful was the learned numerical knowledge used in unfamiliar situations. This appeared most obvious in tasks requiring the recognition of a constant relationship between two variables (*one-to-many correspondence*) and in tasks requiring the identification of multiplicative structures. Tasks including the structure of area were solved directly multiplicative from children using a multiplicative combination rule. Children using an additive rule often solved the task using the strategy of repeated addition.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Vorwort zu Jean Piagets Werk über die Entwicklung des Erkennens (1975) beschreibt Hans Aebli mathematisches Denken als „geistige Konstruktion und Gestaltung der Wirklichkeit in der Denkhandlung. Damit tritt das Denken sozusagen in die Wirklichkeit ein und wird zu ihrem Teil" (S. 4). Bereits in jungen Jahren beginnen Kinder, Dinge zu ordnen, miteinander zu vergleichen und zu strukturieren. Mit diesem Konstruktionsprozess machen sie sich Gedanken über die wahrgenommene Welt und versuchen, sie zu verstehen und zu erklären.

Im Unterschied zu Piaget und Szeminska (1975), welche jüngeren Kindern noch wenig mathematisches Wissen zutrauten, weiss man heute aus Untersuchungen zur kognitiven Entwicklung, dass bereits im Vorschulalter beachtliche mathematische Kompetenzen vorhanden sind. Zahlreiche Forschungsergebnisse zeigten, dass der Erwerb mathematischen Wissens nicht erst mit dem Eintritt in die Schule beginnt. Oft besteht dieses Wissen vorerst in der intuitiven Form. Durch die Analyse von spontanen Urteilen konnte gezeigt werden, dass diese intuitiven Schätzungen nicht „chaotisch" erfolgten, sondern aufgrund einer Verknüpfung der dargebotenen Informationen anhand einer algebraischen Regel. Sogar kleine Kinder waren fähig, komplexe Verknüpfungen vorzunehmen. Das Herausarbeiten solcher intuitiver Verknüpfungsregeln ist ein Ziel von Untersuchungen im Rahmen der Informationsintegrationstheorie von Anderson (1981). In zahlreichen Studien wurde dabei die weitverbreitete Annahme von Piaget und Inhelder (1975), dass Kinder aufgrund mangelnder kognitiver Fähigkeiten nur beschränkt Informationen wahrnehmen können und sich daher auf eine einzige Dimension zentrieren, widerlegt. Falsche Urteile werden nicht mehr mit einem kognitiven Kapazitätsdefizit erklärt, sondern scheinen durch eine falsche Verknüpfung der dargebotenen Informationen zu entstehen. Anderson und Wilkening (1991) erklären die Entwicklung der algebraischen Verknüpfungsregeln in einer funktionalen Perspektive; je nach Aufgabenstellung und Kontext werden die erforderlichen Wissensbereiche abgerufen und zusammengefügt. Nach ihnen hat das Auftauchen der Verknüpfungsregeln mit perzeptuell-motorischen Kenntnissen und Fähigkeiten, mit Erfahrungswerten und Informationssammlungen zu tun.

Von zentraler Bedeutung für die vorliegende Arbeit sind Studien im Rahmen der Informationsintegrationstheorie, welche sich mit der Schätzung von Rechteckflächen befassten. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen zeigten, dass Kinder dabei oft die Dimensionen Länge und Breite nach einer additiven Integrationsregel verknüpften, anstatt die multiplikative Regel zu verwenden. Nach Cuneo (1980) tendieren Kinder ohne Erfahrungen mit dem Experimentiermaterial dazu, eine additive Integrationsregel zu benutzen, egal ob diese stimmt oder nicht. Im Bereich der Rechteckflächenschätzung wurde beobachtet, dass der Übergang von der additiven Integrationsregel zur multiplikativen Regel oft zwischen 8 und 10 Jahren erfolgt. In diesem Zeitraum wird unter anderem im schulischen Unterricht die Multiplikation eingeführt. Es wäre daher durchaus möglich, dass dieses neu erworbene numerische Wissen etwas mit der Veränderung der intuitiven Verknüpfungsregel zu tun haben könnte. Nur wenige Studien im Bereich der Informationsintegrationstheorie befassten sich bisher mit dem Zusammenhang zwischen intuitiven Verknüpfungsregeln und explizitem Wissen. Ebersbach und Resing (2008) konnten im Bereich des linearen und exponentiellen Wachstums einen Zusammenhang dieser beiden Wissensbereiche zeigen, fanden jedoch keinen klaren Entwicklungsverlauf.

Die Grundfragen der vorliegenden Arbeit sind somit, ob sich intuitive Verknüpfungsregeln bei der Schätzung von Rechteckflächen durch die Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht verändern und wie die intuitiven Verknüpfungsregeln mit dem neu erworbenen numerischen Wissen zusammenhängen. Zur Beantwortung dieser Fragen war es notwendig, sich auch Gedanken zum mathematischen Denken zu machen, z.B. zur Frage, wie sich die Addition von der Multiplikation unterscheidet. Das multiplikative Denken der Kinder wird meist anhand von impliziten Modellen beschrieben, welche anhand der Lösungsstrategien bei multiplikativen Problemstellungen untersucht werden. In einem viel beachteten Artikel beschreiben Fischbein, Deri, Nello und Marino (1985), dass das implizite Modell der Multiplikation die wiederholte Addition sei. Oft wird das wiederholte Addieren von Summanden jedoch nur als Rechenstrategie betrachtet, und die Wichtigkeit des proportionalen Denkens wird für das Verständnis der Multiplikation betont. Nunes und Bryant (1998) haben sich ausführlich mit dieser These befasst.

Die Begriffe „intuitiv“ und „implizit“ werden in der Literatur nicht immer einheitlich benutzt. Einige Autoren wenden sie gleichbedeutend an (z.B. Ebersbach & Resing, 2008;

Reber, 1989), andere sehen „implizit“ und „intuitiv“ auf unterschiedlichen Ebenen verankert: “implicit knowledge can be the substrate of correct intuitive decisions” (Van Zuijen, Simoens, Paavilainen, Naatanen & Tervaniemi, 2006, S. 1299).

In der vorliegenden Arbeit wird der Begriff „intuitiv“ insbesondere dann benutzt, wenn es um die Konzepte der kognitiven Algebra und somit um die intuitiven mathematischen Verknüpfungsregeln geht. Unter intuitivem Urteilen wird daher das direkte spontane Schätzen bzw. Antworten auf einer linearen Skala verstanden (z.B. Ebersbach & Wilkening, 2007). Aufgrund dieser Urteile können mittels statistischer Analyse die algebraischen Verknüpfungsregeln herausgefunden werden.

Der Begriff „implizit“ wird verwendet, wenn von Wissensbereichen gesprochen wird, die durch Erfahrungen im alltäglichen Leben erworben werden. Diese sind kaum bewusst zugänglich: sie wurden aufgrund von Situationen, Eindrücken und Erfahrungen gewonnen. Explizites Wissen wird im Unterschied dazu meist durch formale Instruktion und durch das Lernen von formalen Regeln erworben. Es ist bewusst zugänglich und kann verbal ausgedrückt werden (Büssing, Herbig, & Latzel, 2004; Ebersbach & Resing, 2008; Fischbein, et al., 1985; Polanyi, 1985). Die Aneignung impliziten Wissens ist somit nicht von Aufmerksamkeit oder bewusstem Lernen abhängig, oft werden die Inhalte weder reflektiert noch überprüft (Reber, 1989). Auch Fischbein et al. (1985) betonen, dass solche Modelle nicht auf Überprüfung angewiesen sind, da sie unmittelbare Formen der Kognition darstellen. Sie können auch falsche bzw. naive Theorien enthalten.

Aufgrund dieser kurzen Beschreibung des Theorierahmens ist ersichtlich, dass in der vorliegenden Arbeit, obwohl sie entwicklungspsychologische Fragestellungen behandelt, auch methodisch-didaktische Themen der Mathematik eine Rolle spielen. Es ist daher angebracht, einen Exkurs in diesen Bereich zu machen. Im Anschluss an die ausführliche Behandlung der wichtigsten Ansätze und Studien im Theorieteil folgt die Überleitung zum empirischen Teil. Auf die detaillierten Fragestellungen wird jeweils direkt vor der Beschreibung der Untersuchungen eingegangen.

2 Theoretischer Hintergrund

2.1 Informationsintegrationstheorie

Die Informationsintegrationstheorie nach Anderson (1981, 1996) geht davon aus, dass die meisten Urteile und Handlungen im alltäglichen Leben aufgrund einer Integration und Verknüpfung dafür wichtiger Einflussgrössen erfolgen. Unser Antwortverhalten ist somit die Kombination aus einer subjektiven (psychologischen) Bewertung der Informationsparameter und einer subjektiven Integration dieser Informationen. Wie in zahlreichen Untersuchungen im Rahmen der Informationsintegrationstheorie beobachtet wurde, geschieht die Verknüpfung der Informationen nach einfachen algebraischen Regeln. Daher spricht man in diesem Zusammenhang auch von kognitiver Algebra. Am häufigsten wurden die algebraischen Verknüpfungs- bzw. Integrationsregeln Addition, Multiplikation und Durchschnittsbildung gefunden. Das Grundprinzip bei der experimentellen Bestimmung dieser intuitiven Verknüpfungsregeln ist, dass jeweils mindestens zwei Variablen in einem faktoriellen Design präsentiert werden und die Kinder den gemeinsamen Effekt dieser Variablen schätzen. Die intuitiven Urteile müssen auf einer mehrstufigen oder kontinuierlichen Antwortskala erfolgen.

2.1.1 Kognitive Algebra bei der Flächenschätzung

Piaget und Inhelder (1975) zeigten Kindern zwei gleich grosse Gläser, welche mit Wasser gefüllt waren, und liessen sich von ihnen bestätigen, dass beide gleich viel Flüssigkeit enthalten. Danach wurde der Inhalt aus dem einen Glas in ein drittes, leeres Glas geschüttet, welches z.B. höher und dünner war, und es wurde erneut gefragt, welches Glas mehr Flüssigkeit enthalte. Kinder in der präoperationalen Phase scheiterten bei dieser Frage: Entweder sagten sie, in dem neuen Glas sei mehr Flüssigkeit, weil es höher ist, oder sie sagten, in dem ursprünglichen Glas sei mehr Flüssigkeit, weil es breiter ist. Nach Piaget und Inhelder (1975) fehlt es den Kindern an kognitiver Kapazität, um sämtliche Dimensionen gleichzeitig zu berücksichtigen, sodass sie auf eine Dimension (Höhe oder Breite) zentrieren. Untersuchungen zur Informationsintegrationstheorie (z.B. Wilkening, 1979) zeigten jedoch, dass Kinder bereits in der präoperationalen Phase mehrere Dimensionen gleichzeitig beachten können. Dieser Befund legt die Annahme nahe, dass die

Fehlurteile der Kinder in Piagets und Inhelders Untersuchung nicht aufgrund eines kognitiven Kapazitätsdefizits zustande kamen, sondern aufgrund einer falschen Verknüpfung der gegebenen Informationen. Die Kinder sind fähig, sämtliche Dimensionen gleichzeitig zu beachten, benutzen jedoch qualitativ unterschiedliche Integrationsregeln, welche von den physikalisch korrekten Regeln abweichen.

Ein grosser Teil der Studien, welche im Rahmen der Informationsintegrationstheorie durchgeführt wurden, befasste sich mit der Schätzung von Rechteckflächen (Leon, 1982; Rulence-Paques & Mullet, 1998; Silverman & Paskewitz, 1988; Wilkening, 1978, 1979; Wolf, 1995). Wilkening (1979) untersuchte, wie Kinder und Erwachsene die Länge und Breite bei der intuitiven Schätzung von Rechteckflächen integrieren. Dabei wurden die Rechteckflächen als Schokoladetafeln präsentiert, und die Versuchspersonen mussten sich vorstellen, dass die Fläche (Schokoladetafel) in Stücke gebrochen wird und die Stücke in einer Reihe nebeneinander gelegt werden. Die Länge dieser Strecke musste auf einer 2 m langen Skala geschätzt werden. Die Ergebnisse zeigten, dass die Integration von Länge und Breite bei 5-6-jährigen Kindern grösstenteils additiv und bereits ab 8 Jahren mehrheitlich multiplikativ vorgenommen wurde.

Anderson und Cuneo (1978) untersuchten die intuitiven Verknüpfungsregeln der Kinder bei der Schätzung von Flächen und Volumina. Unter anderem benutzten sie als Stimuli ebenfalls verschiedene Rechteckflächen, welche als Kekse präsentiert wurden. Die Skala in ihrem Experiment zeigte ein lachendes Gesicht am einen und ein weinendes Gesicht am anderen Ende. Die Schätzungen der Kinder auf dieser Happiness-Skala bezogen sich darauf, wie glücklich oder wie traurig ein Kind über die Kekse wäre. Bei den 5-Jährigen in ihrer Untersuchung fand die Verknüpfung der Dimensionen Länge und Breite am häufigsten additiv statt. Diese additive Integrationsregel erschien auch bei anderen Flächenformen und unter verschiedensten experimentellen Bedingungen. Bei den 8-Jährigen wurde eine Tendenz zur multiplikativen Verknüpfungsregel entdeckt, und ab 11 Jahren wurde diese am häufigsten benutzt. Nach Cuneo (1980) tendieren Kinder ohne Erfahrungen mit dem Experimentiermaterial dazu, eine additive Verknüpfung der Stimuli vorzunehmen, egal ob diese spezifische Regel stimmt oder nicht. Sie sieht diese Additionsregel daher als basale Form der Informationsintegration.

In einem Flächenschätzexperiment bei 8- und 9-jährigen Kindern entdeckte Leon (1982) ebenfalls eine multiplikative Verknüpfung der Länge und Breite. Das Scheitern der 7-Jährigen bei der Verwendung der korrekten Integrationsregel begründete er ebenfalls nicht mit der mangelnden Kapazität zur Aufnahme von Informationen, sondern mit der unzureichenden Informationsverarbeitungskapazität und dem fehlenden Wissen über die Beziehung zwischen Länge und Breite. Den 8- und 9-Jährigen sprach er aufgrund des gefundenen multiplikativen Musters das Verständnis der Proportionalitätsregel zu.

Obwohl der Übergang von einer additiven zu der korrekten multiplikativen Verknüpfungsregel bei der Schätzung von Rechteckflächen jeweils relativ konstant zwischen 8 und 10 Jahren zu beobachten war, scheint dies keine generelle Charakteristik des kindlichen Denkens zu sein. Das Alter, in dem die korrekten intuitiven Verknüpfungsregeln gefunden wurden, variierte nach thematischem Bereich, Stimulusmaterial und Aufgabenstellung. So wurde eine multiplikative Integrationsregel z.B. im Bereich der Integration von Geschwindigkeit, Zeit und Distanz bereits bei 5-Jährigen entdeckt (Wilkening, 1981).

2.1.2 Assemblage-Theorie

Im Unterschied zu den Stufentheorien der kognitiven Entwicklung (z.B. Piaget, 1985) welche von einem Wechsel der kognitiven Strukturen ausgehen, beschreiben Anderson und Wilkening (1991) die Wissensentwicklung aus einer funktionalen Perspektive und nicht als Abfolge von rigiden Stufen. Im Zusammenhang mit der Assemblage-Theorie (Wilkening, 1989) spricht man daher nicht von reinen Wissenskonzepten, sondern von einer „Ansammlung von Merkmalen verschiedener Fähigkeiten (Skills), die bei der Lösung von Aufgaben typischerweise zusammenwirken“ (S. 426). Diese Wissensformen auf unterschiedlichen Levels operieren je nach Anforderung der Aufgabe verschieden miteinander und adaptieren sich an die gegebenen Situationen. Das adaptive Denken ist somit die „Fähigkeit, sich auf die Anforderungen der Aufgabensituation einzustellen und das Potential von Lösungsmöglichkeiten flexibel einzusetzen“ (S. 427). Für den Entwicklungsverlauf heisst dies, dass die kognitiven Leistungen der Kinder zur Beachtung und Integration von Informationen zunehmen, jedoch spielen jeweils auch Erfahrungswerte, Aufgabenstellung, Vertrautheit mit dem Stimulusmaterial und Kontext der Aufgabe eine wichtige Rolle. Es ist somit die Charakteristik einer Aufgabe, die bestimmt, welche Wissenssysteme zur Lösung herbeigezogen werden.

2.1.3 Wichtige Befunde zu den intuitiven Verknüpfungsregeln

Im folgenden Kapitel werden weitere Forschungsergebnisse zu den intuitiven Verknüpfungsregeln vorgestellt, welche für die vorliegende Untersuchung von Bedeutung sind. Dabei waren vor allem zwei Aspekte von Interesse: einerseits, ob die falschen oder vereinfachten Regeln durch Trainings oder Interventionen verändert werden können, andererseits, wie die intuitiven Verknüpfungsregeln mit dem numerischen multiplikativen Wissen zusammenhängen.

Veränderung der intuitiven Verknüpfungsregeln

Hinweise für eine qualitative Änderung der Integrationsregeln lieferte Wolf (1995). Aufgrund der Hypothese, dass die Vertrautheit mit dem Stimulusmaterial ein wichtiger Faktor für eine qualitativ bessere oder der Norm entsprechende Verknüpfungsregel ist, führte er eine Trainingsstudie durch. Durch ein 10-minütiges Spiel mit dem Stimulusmaterial, welches aus Rechteckflächen bestand, versuchte er bei den 5- bis 11-jährigen Kindern eine Verbesserung der additiven Integrationsregel in Richtung multiplikativer Regel zu bewirken. Er teilte die untersuchten Kinder in zwei Gruppen ein, wovon nur die eine Gruppe die Gelegenheit hatte, mit den Flächen zu spielen. Die Resultate der Gruppe ohne Übungsmöglichkeit stimmten mit denen von Anderson und Cuneo (1978) überein. Bei den jüngeren Kindern zeigte sich eine additive Verknüpfung der Länge und Breite und bei den älteren Kindern eine multiplikative Verknüpfung der beiden Dimensionen. In der Gruppe mit Übungsmöglichkeit verknüpften die Kinder die Länge und Breite häufiger anhand der normativen multiplikativen Integrationsregel. Dieser Lerneffekt hielt jedoch bei den jüngeren Kindern nach einer Woche nicht mehr an. Trotz allem konnte Wolf mit dieser Untersuchung zeigen, dass Kinder durch eine vorgängige Handlung mit dem Versuchsmaterial häufiger die normative Verknüpfungsregel benutzten als Kinder ohne diese Übungsmöglichkeit. Die Handlung wäre somit eine zeitliche Kompensation für das Fehlen von ausreichend Kontakt mit den Objekten gewesen. Die Vertrautheit mit dem Stimulusmaterial scheint somit ein Schlüsselelement für die Änderung vereinfachter intuitiver Verknüpfungsregeln zur normativen Regel zu sein.

Auch Rümmele (1993) versuchte, mit einer Trainingsstudie die Verknüpfungsregeln bei der Schätzung von Rechteckflächen zu verändern. Ziel war eine Verbesserung der bisherigen Verknüpfungsstrategie zum nächsthöheren Niveau. Sie unterschied in ihrer Untersuchung nicht nur die Art der Verknüpfungsregeln, sondern auch die Beachtung der Stimulusdimensionen. Der Entwicklungsverlauf erfolgt nach ihr von der Zentrierung, die Beachtung einer Dimension, über die Dezentrierung, die Beachtung zweier Dimensionen, zur multiplikativen Integrationsregel. Die Trainings fielen je nach Verknüpfungsregel unterschiedlich aus, da nach ihr ein Training an den kognitiven Entwicklungsstand des Kindes angepasst sein muss, um wirksam zu sein. Die Versuchspersonen mit der Zentrierungsstrategie wechselten nach dem Training häufig zur Beachtung beider Dimensionen. Bei den Dezentrierern profitierten die älteren Kinder (10 Jahre) mehr vom Training als die jüngeren (8 Jahre). Dies zeigte sich dadurch, dass die älteren Kinder sowohl bei der Generalisierung der Aufgaben als auch bei der Beschreibung der Multiplikation auf einem expliziten Level besser waren. Rümmele sah dies als Beleg für einen Interaktionseffekt zwischen dem Alter und dem Verständnis für die Multiplikationsregel. Die additive Verknüpfungsregel ist nach ihr eine Vorläuferstrategie zur multiplikativen Regel. Sie konnte jedoch keine generelle Entwicklungsabfolge entdecken.

Zusammenhang zwischen intuitiven Verknüpfungsregeln und explizitem Wissen

Krist, Fieberg und Wilkening (1993) verglichen in ihrer Studie zum horizontalen Wurf intuitives Wissen, welches mit einer Handlungsbedingung erhoben wurde, mit dem expliziten Wissen, welches anhand von verbalen Urteilen untersucht wurde. Während die Handlungen selbst bei den 5-6-jährigen Kindern gemäss der korrekten multiplikativen Integrationsregel erfolgten, war es den Versuchsteilnehmenden in der Urteilsbedingung oft nicht möglich, sämtliche relevanten Dimensionen zu beachten. Dies war nicht nur bei den jüngsten Kindern der Fall. Auch Kinder in der vierten Klasse und sogar manche Erwachsene benutzten in der Urteilsbedingung eine falsche Höhenheuristik. Die Resultate dieser Untersuchung zeigten, dass auf dem expliziten Level selbst bei Erwachsenen Misskonzepte vorhanden waren, während die Handlungen korrekt erfolgten. Verschiedene Wissensformen können somit bis zum Erwachsenenalter nebeneinander bestehen bleiben. Mit Piagets Worten würde dies bedeuten, dass sensumotorisches Wissen und konkrete und formale Operationen Hand in Hand gehen oder in friedlicher Koexistenz nebeneinander bestehen können (Rümmele, 1993).

Ebersbach und Resing (2008) beschäftigten sich ebenfalls mit dem Zusammenhang zwischen intuitivem und explizitem Wissen. Zur Prüfung der intuitiven Verknüpfungs-regeln im Bereich von linearen und non-linearen Prozessen zeigten sie 5- bis 9-jährigen Kindern einen Wachstumsprozess, zu dessen Verlauf bzw. zukünftiger Grösse spontane Schätzungen gemacht werden mussten. Das explizite Wissen wurde anhand der verbalen Erklärungen bezüglich der Wachstumsprozesse untersucht. Insgesamt waren die Kinder auch in dieser Untersuchung intuitiv besser als explizit, sowohl beim linearen als auch beim nicht-linearen Wachstum. Ebersbach und Resing schlossen daraus, dass sich auf diesem Gebiet intuitives Wissen jeweils vor dem expliziten Wissen entwickelt, wobei das Wissen zum linearen Wachstum früher vorhanden zu sein scheint als dasjenige zu non-linearen Prozessen. Sie fanden Belege dafür, dass sich die intuitiven und expliziten Wissensbereiche nicht unabhängig voneinander entwickeln.

2.2 Protoquantitative Schema

Eine epistemologische Theorie über die Beziehung zwischen implizitem und explizitem mathematischem Wissen beschreibt Resnick (1989). Sie entdeckte, dass bei Kindern bereits vor dem formalen Unterricht Mengenvorstellungen vorhanden sind. Dieses frühe Wissen erklärt sie anhand von protoquantitativen Schemata (proto, weil ohne Einfluss von numerischer Quantifikation). Dabei unterscheidet sie zwischen protoquantitativem Vergleichsschema, protoquantitativem Zunahme-Abnahme-Schema und protoquantitativem Teil-Ganzes-Schema. Das protoquantitative Vergleichsschema beschreibt die Fähigkeit der Kinder, Dinge auf Grund ihrer Grösse zu vergleichen. Die Urteile beruhen dabei auf einem direkten Vergleich zweier Mengen, wobei dies wahrnehmungsgesteuert, ohne zu messen, geschieht. Beim protoquantitativen Zunahme-Abnahme-Schema geht es um Urteile über die Vergrösserung oder Verkleinerung einer Menge. Durch Beobachtungen im Alltag erfolgt das Erkennen der additiven Eigenschaften von Quantitäten und somit die Entwicklung des protoquantitativen Teil-Ganzes-Schema. Die Kinder können, trotz Fehlens gewisser Grundlagen, beurteilen, dass z.B. ein ganzer Kuchen grösser ist als jedes seiner

Stücke. Wie bei der Addition gilt dabei: Das Ganze ist immer grösser als die einzelnen Teile davon. Die Fähigkeit, analytisch vorzugehen und ein Urteil aus zwei separaten Schätzungen zu bilden, tritt erst auf, nachdem Kinder fähig zum Zählen und Messen grosser Beträge sind, wobei auch dabei das protoquantitative Urteilen vorerst noch nicht auf strikten numerischen Quantifikationen beruht. Die protoquantitativen Schemata und das Zählwissen entwickeln sich nach Resnick (1989, 1992) zunächst unabhängig voneinander. Das implizite wahrnehmungsgesteuerte Wissen wird jedoch später mit dem expliziten Wissen kombiniert, wodurch das exakte quantitative Zahlenkonzept entsteht. Für eine ausführliche Beschreibung zur Entwicklung des Zählwissens (vgl. Gallistel & Gelman, 1992; Singer, Kohn, & Resnick, 1997).

Singer et al. (1997) vergleichen diese Theorie mit einem Experiment von Wilkening (1981) zur intuitiven Integration von Geschwindigkeit, Zeit und Distanz. In dieser Untersuchung wurde den Kindern eine Geschichte von Tieren erzählt, die in der Nähe einer Hundehütte spielen. Wenn der Hund in der Hütte zu bellen anfängt, kriegen sie Angst und eilen davon. Die Kinder erhielten jeweils Informationen über zwei Variablen. Die Geschwindigkeit wurde durch schnelle oder langsame Tiere repräsentiert, die zeitliche Komponente durch die Dauer des Bellens eines Hundes und die Distanz dadurch, wie weit ein Tier von der Hundehütte weglaufen kann. Die Resultate zeigten, dass die Geschwindigkeitsurteile bei den jüngeren Kindern mittels Augenbewegung, einer kinästhetischen Strategie, erfolgten. Sie fixierten den Ausgangspunkt und bewegten ihre Augen in der Zeit, in welcher der Hund bellte, von der Hundehütte weg. Dieses direkte, wahrnehmungsgesteuerte Urteilen ist nach Singer et al. vergleichbar mit einem protoquantitativen Schema. Oft waren die Urteile nahe an der mathematisch korrekten Lösung, obwohl keine Berechnungen zu den Beziehungen der dargebotenen Informationen vorgenommen wurden. Das Bellen des Hundes wurde in dieser Untersuchung jedoch auch zeitversetzt präsentiert, was eine kinästhetische Strategie verunmöglichte. In dieser Bedingung benutzten die Kinder eine additive Strategie der Dimensionen Weg und Zeit und gingen dabei analytisch vor.

Es existieren somit Hinweise über einen Zusammenhang zwischen intuitivem und explizitem Wissen. Wie die Entwicklung dabei verläuft und wie genau diese beiden Wissensformen zusammenhängen, wurde bisher jedoch nicht geklärt. Mit weiteren

Überlegungen zum multiplikativem Denken, welche teilweise auch didaktische Theorien einbeziehen, wird dieser Fragestellung noch genauer nachgegangen.

2.3 Überlegungen zum multiplikativen Verständnis

Beschäftigt man sich mit der Multiplikation oder mit multiplikativem Denken, so stösst man sehr schnell auf die Frage, worin sich die Multiplikation von der Addition unterscheidet. Eine abschliessende Diskussion darüber wird an dieser Stelle nicht geführt, es werden jedoch die Ansätze der wichtigsten Vertreterinnen und Vertreter vorgestellt.
Oft wird darüber diskutiert, ob die Multiplikation (z.B. 3 x 4) mit der wiederholten Addition (z.B. 4 + 4 + 4) gleichzusetzen ist. Dass die wiederholte Addition eine effiziente Strategie zur Lösung von multiplikativen Aufgaben ist, scheint unbestritten. Da im schulischen Unterricht die Addition zuerst gelehrt wird, bietet sich diese Lösungsstrategie auch als logischer Weg zur Einführung in die Multiplikation an. Durch die wiederholte Addition schleicht sich jedoch die Fehlvorstellung ein, dass das Produkt grösser sein muss als beide Operanden, da durch das Addieren jeweils etwas zusammengefügt und dadurch vergrössert wird. Ist dies nicht der Fall, z.B. beim Rechnen mit Brüchen, kann das für die Kinder verwirrend sein.

Die meisten Forschenden kamen auf die gleiche Unterscheidung zwischen der Addition und der Multiplikation wie bereits Piaget (1987). Nach ihm ist die Multiplikation komplexer als die Addition und erfordert höhere Abstraktionslevels. Clark und Kamii (1996) sprechen von einem *higher-order-thinking* der Multiplikation gegenüber der Addition und meinen damit ebenfalls, dass das multiplikative im Vergleich zum additiven Denken auf einer höheren Abstraktionsebene angesiedelt ist. Additives Denken benötigt nur einen Abstraktionslevel, es werden Einheiten gebildet und sukzessiv zusammengefügt (3 + 3 = 6 + 3 = 9 + 3 = 12). Die Multiplikation erfordert ein hierarchisches Denken, welches auf mehr als einem Abstraktionslevel stattfindet. So wird z.B. aus drei einzelnen Einheiten eine neue gebildet. Diese Abstraktion findet auf einem höheren Level statt (Abbildung 1).

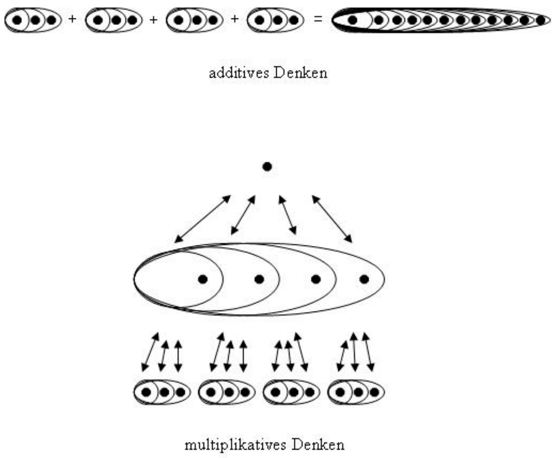


Abbildung 1. Unterschied zwischen additivem (3 + 3 + 3 + 3) und multiplikativem Denken (4 x 3), nach Clark und Kamii (1996, S. 42).

Des Weiteren ist für ein multiplikatives Verständnis das Wissen um die Beziehungen zwischen den Einheiten und den Levels notwendig. Clark und Kamii (1996) sprechen in diesem Zusammenhang von der *many-to-one correspondence.* Dabei ist es wichtig, dass diese Abstraktion sowohl zu einem höheren Level als auch wieder zu einem tieferen Level gemacht werden kann. Dies wird in der Abbildung 1 durch die Pfeile, welche in beide Richtungen zeigen, verdeutlicht. In ihrer Untersuchung fanden Clark und Kamii heraus, dass das multiplikative Denken bereits im frühen Alter erscheint, sich jedoch sehr langsam entwickelt. Teilweise war das additive Denken auch noch bei Kindern in der fünften Klasse vorhanden.

Es stellt sich die Frage, wie ein implizites Verständnis von multiplikativen Situationen vorhanden sein kann, ohne dass formale Instruktionen über die Operation der Multiplikation erfolgten. Dies kann mit impliziten Modellen erklärt werden. Über deren Erwerb und Funktion gibt es unterschiedliche Vorstellungen.

2.3.1 Implizite Modelle der Multiplikation aufgrund von Lösungsstrategien

Einer der meist zitierten Artikel zu den impliziten Modellen der Multiplikation stammt von Fischbein et al. (1985). Nach ihnen liegt jeder fundamentalen arithmetischen Operation ein implizites Modell zu Grunde, welches das Denken dominiert und nicht immer mit der formalen mathematischen Operation übereinstimmt. Ein implizites Modell ist nicht der bewussten formalen Kontrolle unterstellt und kann im Vergleich zur Theorie naiv oder falsch sein. Schwierigkeiten im mathematischen Lernen können somit durch einen Konflikt zwischen formalen algorithmischen Strukturen und impliziten Modellen verursacht werden. Bei der Multiplikation ist nach Fischbein et al. das „implicit, unconscious and primitive intuitive model“ (S. 4) die wiederholte Addition, bei welcher die Vorstellung vorherrscht, dass eine Anzahl gleicher Einheiten zusammengefügt wird. Dieses implizite Modell fanden Tirosh und Graeber (1994) sogar bei Studierenden in der Ausbildung zur Lehrperson. Etwa bei der Hälfte dieser Probanden in ihrer Studie dominierte die Vorstellung, dass bei einer Multiplikation das Produkt jeweils grösser als jeder Faktor sein muss - dies, obwohl Aufgaben gelöst wurden, die etwas anderes zeigten.

Im schulischen Unterricht wird die wiederholte Addition als Einstieg in die Multiplikation empfohlen, da sie auf dem bereits Gelernten aufbaut und somit den Voraussetzungen der Schulkinder entspricht. Der Zugang über das Addieren von gleichen Summanden wird in den Didaktikbüchern als zeitlich-sukzessives Modell beschrieben (siehe Exkurs, Kapitel 2.4). Es wird jedoch betont, dass die Multiplikation in verschiedenen Zusammenhängen gelernt werden sollte und sich nicht ausschliesslich auf die Interpretation als wiederholte Addition beschränken darf (Krauthausen & Scherer, 2007; Lorenz & Radatz, 1993). Fischbein et al. (1985) sprechen im Zusammenhang mit der Einführung mittels wiederholter Addition von einem didaktischen Dilemma, da die Lehrperson damit einerseits resistente und inkomplette Modelle kreiert, welche später einen Konflikt mit den formalen Konzepten der Multiplikation ergeben können. Andererseits würden psychologisch und didaktisch elementare Prinzipien verletzt werden, wenn man solche Modelle vermeiden würde, zumal deren Ideen auf einer impliziten Basis mit den arithmetischen Operationen in Beziehung stehen.

Nach Piaget (1985) sind die Kinder mit dem Aufkommen der konkret-operationalen Phase offener für formale Überlegungen, und die primitiven Modelle verlieren ihren Einfluss zu Gunsten erwachsener mathematischer Begründungen. Fischbein et al. (1985) sehen die impliziten Modelle tiefer verankert und gehen davon aus, dass die Ausführung einer arithmetischen Operation auch nach dem Erreichen des formalen Status noch ans primitive Konzept gebunden sein kann. Die Entwicklung der formal-operationalen Begründungen im

Erwachsenenalter löst nach ihnen das Dilemma nicht von selbst; Schwierigkeiten oder Konflikte zwischen der korrekten Operation und dem impliziten Modell können auch nachher noch bestehen.

Wenn es um kindliche Lösungsstrategien bei Multiplikationsaufgaben geht, decken sich die Strategiegruppen, welche in verschiedenen Studien beschrieben werden, im Wesentlichen miteinander. Daher werden an dieser Stelle stellvertretend die Lösungsstrategien nach Anghileri (1989) aufgezeigt. Durch das Erkennen und Bilden von Einheiten erfolgt nach ihr der Übergang vom einzelnen Zählen zum rhythmischen Zählen. Dies ist ein wichtiger Schritt in der Entwicklung zum multiplikativen Denken. In Abbildung 2 sind weitere Fähigkeiten und Strategien aufgelistet, welche für das Bearbeiten von Multiplikationsaufgaben benötigt werden.

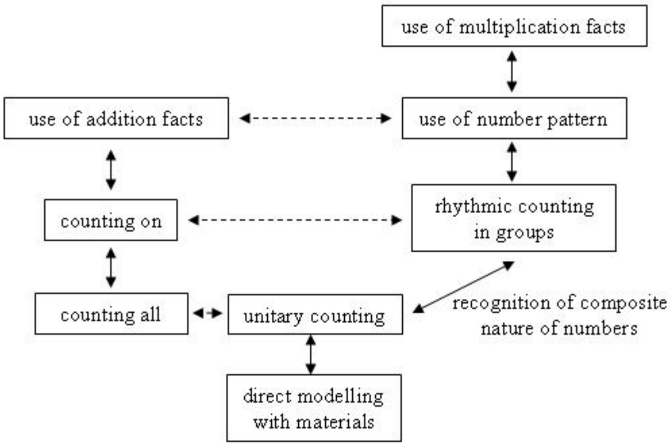


Abbildung 2. Entwicklung der Fähigkeiten (Skills), welche für das additive und multiplikative Problemlösen gebraucht werden, nach Anghileri (1989, S. 376).

Wie Anghileri (1989) sieht auch Steffe (1992, 1994) einen wesentlichen Unterschied zwischen der Addition und der Multiplikation im Zählschema. Kinder müssen lernen, dass man nicht nur einzeln zählt, und sollten z.B. bei drei Dingen nicht auf drei Einzeldinge fokussieren, sondern diese drei Dinge als ein Ganzes sehen. Dadurch erfolgt die Entwicklung vom Zählen jeder einzelnen Zahl zum Zählen der Einheiten. Durch das wiederholte rhythmische Zählen dieser Einheiten werden diese Zahlen internalisiert und es werden Zahlenmuster gelernt. Verdoppelungen sind nach Anghileri (1989) der niedrigste

Level der Multiplikation. Gemäss Ruwisch (2001) können sie jedoch sowohl mit der Addition als auch mit der Multiplikation assoziiert werden: „Aufgabenstellungen zum Verdoppeln können daher zwar als multiplikative Aufgaben gedeutet werden, eine Interpretation im Sinne einer Addition ist aber ebenfalls geeignet und ausreichend“ (S. 85).

Für Kouba (1989) ist jede Kalkulationsstrategie ein Beweis für eine internale mentale Struktur, was für sie gleichbedeutend mit einem impliziten Modell ist. In ihrer Studie wollte sie durch das Analysieren von Lösungsstrategien mehr über die impliziten Modelle herausfinden. Die gefundenen Lösungsstrategien der Kinder teilte sie nach dem *degree of abstractness* in fünf Kategorien ein, wobei sich diese mit denen von Anghileri (1989) und Mulligan und Mitchelmore (1997) decken. Aufgrund ihrer Beobachtungen präzisierte Kouba (1989) die Aussage von Fischbein et al. (1985), dass für das implizite Modell der Multiplikation, die wiederholte Addition, Kinder eine Anzahl gleicher Sets zusammenfügen müssen. Nach ihr sollte dieses Modell zu einem Zwei-Schritt-Modell modifiziert werden, da Kinder diese Sets in einem ersten Schritt zuerst selbst konstruieren müssen und dann erst zusammenfügen können.

Wie Kouba (1989) sehen auch Mulligan und Mitchelmore (1997) Kalkulationsstrategien als Beweis für implizite Modelle (für sie das gleiche wie intuitive, tacit oder informal model). Sie gehen jedoch nicht wie Fischbein et al. (1985) nur von einem einzigen, sondern von mehreren Modellen aus. Nach ihnen existieren bei der Multiplikation drei implizite Modelle mit einer jeweils dazugehörigen Gruppe von Kalkulationsstrategien. Da je nach Problemsituation ein anderes implizites Modell verwendet wird, müsste nach Mulligan und Mitchelmore (1997) auch eine direkte Beziehung zwischen dem impliziten Modell und der semantischen Struktur der Problemstellung existieren. Über diese Beziehung sowie die Entwicklung der impliziten Modelle versuchten sie in ihrer Studie mehr herauszufinden. Dabei beobachteten sie die gleichen Rechenstrategien wie Kouba (1989) und Anghileri (1989). Tabelle 1 zeigt die Kalkulationsstrategien und deren Klassifikation in drei implizite Modelle.

Tabelle 1

Implizite Modelle und die dazugehörigen Kalkulationsstrategien, nach Mulligan und Mitchelmore (1997, S. 316)

Implizites Modell	**Kalkulationsstrategien**
1. direktes Zählen	einzelnes Zählen
2. wiederholte Addition	rhythmisches Zählen
	skip counting
	wiederholtes Addieren
	verdoppeln
3. multiplikative Operation	Wissen über multiplikative Fakten
	Ableiten von multiplikativen Fakten

Nach Mulligan und Mitchelmore (1997) bauen diese drei impliziten Modelle aufeinander auf. Für die wiederholte Addition braucht es im Gegensatz zum direkten Zählen die Fähigkeit, gleich grosse Gruppen bilden zu können. Bei der multiplikativen Operation wird die Multiplikation explizit als binäre Operation erkannt: Es wird direkt gerechnet, es werden nicht mehr einzelne Einheiten zusammengezählt. Ein wichtiges Resultat dieser Untersuchung war, dass bei den meisten Kindern das gewählte implizite Modell nicht mit der Problemstellung und der semantischen Struktur zusammenhing. Sie fanden zwar bei allen semantischen Strukturen eine Präferenz für die wiederholte Addition, jedoch wurden alle Modelle über sämtliche Aufgabenstellungen hinweg benutzt. Die Charakteristik einer Aufgabe, die semantische Struktur und natürlich die Grösse der Zahlen scheinen beeinflusst zu haben, welches implizite Modell benutzt wurde. Auch die Resultate von Anghileri (1989) zeigten, dass die Schwierigkeit einer Aufgabe durch die semantische Struktur und die Grösse der Zahlen variiert und dass verschiedene implizite Modelle für die unterschiedlichen Aufgaben angewandt werden. Nach Mulligan und Mitchelmore (1997) besitzen Kinder somit nicht ein einziges implizites Modell, sondern entwickeln ein Set von Modellen mit einem Repertoire an Lösungsstrategien, welche einen progressiven Verlauf zeigen.

Der eine Literaturstrang bildet den Zugang zu den impliziten Modellen der Multiplikation über die Lösungsstrategien. Ein anderer Teil der Forschung zur Multiplikation betont die Wichtigkeit des proportionalen Denkens für das multiplikative Verständnis. Dabei bildet das Erkennen von Beziehungen einen wichtigen Faktor. Im folgenden Kapitel wird auf den Erwerb dieses Wissens genauer eingegangen.

2.3.2 Proportionale Modelle der Multiplikation

Nunes und Bryant (1998) beschreiben den konzeptuellen Unterschied zwischen dem additiven und dem multiplikativen Denken folgendermassen: Addition basiert *on the logic of part-whole relations* und die Multiplikation *on the logic of correspondences*. Nach ihrer Definition ist multiplikatives Denken relationales Denken, welches erlernt werden muss und eine Überwindung der additiven Strategien erfordert. Clark und Kamii (1996) betonen ebenfalls, dass es bei der Multiplikation, neben dem Bilden von Abstraktionslevels, wichtig ist, Beziehungen zu bilden, welche für das additive Denken nicht notwendig sind.

Das multiplikative Denken erfordert nach Nunes und Bryant (1998) das Erlernen eines neuen Sets von *number meanings*. Beim additiven Verständnis sind dies die Grösse der Einheiten und das Zusammenfügen der Objekte. Das multiplikative Denken benötigt nach ihnen zusätzlich das Verständnis der *one-to-many correspondence*, manchmal auch *Ratio* genannt. Damit ist das Verständnis über die Beziehung zwischen zwei Zahlen gemeint (z.B. 1 Auto hat 4 Räder = 1:4). Dabei ist das Wissen um die Konstanz dieses Verhältnisses wichtig, also, dass das Verhältnis gleich bleibt, selbst wenn die Zahl der Autos und der Räder ändert (3:12 ist dasselbe Verhältnis wie 1:4). Die Anzahl Replikationen (3 Autos anstatt 1 Auto) wird Skalarfaktor genannt. Diese konstante *one-to-many correspondence* existiert bei der Addition nicht. In den folgenden Abschnitten werden die Unterschiede zwischen dem additiven und dem multiplikativen Verständnis noch genauer erläutert.

Der Ausdruck proportionales Denken wird in der Literatur oft sehr unterschiedlich gehandhabt. An dieser Stelle wird daher kurz erwähnt, wie Ratio und Proportion in der vorliegenden Arbeit unterschieden werden. Der Begriff Ratio ist identisch mit der Beziehung zwischen zwei Zahlen. Proportionen sind gleiche Sets von numerischen Ratios, also wie zwei Ratios zueinander in Beziehung stehen (Abbildung 3); mathematisch wird dies als eine Äquivalenz von zwei Ratios definiert (5:3 = 10:6). Für proportionales Denken müssen Kinder verstehen, wie zwei Ratios zueinander stehen (Confrey & Smith, 1995; Singer, et al., 1997; Tourniaire & Pulos, 1985).

Die Entwicklung des Korrespondenzschemas

Piaget und Szeminska (1975) beschrieben als Erste die Wichtigkeit des Korrespondenzschemas für die Entwicklung des multiplikativen Denkens. Der Weg zum multiplikativen Verständnis erfolgt nach ihnen über verschiedene Stufen. Die ersten Schritte werden bereits im jungen Alter gemacht, indem bei zwei korrespondierenden Mengen die einzelnen Stücke einander zugeordnet werden. Mit dieser Stück-für-Stück-Korrespondenz werden Mengen zerlegt und miteinander verglichen. Ein weiterer wichtiger Schritt in der Entwicklung ist dabei das Erkennen der Äquivalenz. Kinder, welche keine Stück-für-Stück-Korrespondenz herstellen können, sind nach Piaget und Szeminska (1975) nicht fähig, eine numerische Multiplikation durchzuführen, nicht mal eine Verdoppelung. Die Entwicklung zum multiplikativen Denken führt nach ihnen somit von der Stück-für-Stück-Korrespondenz über die zwei-eindeutige und wechselseitige Korrespondenz zwischen mehreren Gruppen (oft auch multiple Korrespondenz genannt) zur arithmetischen Multiplikation. Sie beschreiben diese Entwicklung, welche zuerst auf anschaulicher Ebene und danach auf der operativen erfolgt, folgendermassen:

> Unter psychologischem Gesichtspunkt bedeutet das einfach, dass eine zwei-eindeutige und wechselseitige Korrespondenz implicite eine Multiplikation ist. Infolgedessen führt eine zwischen mehreren und nicht nur zwischen zwei Gruppen hergestellte Korrespondenz die Versuchsperson früher oder später zur Bewusstwerdung dieser Multiplikation und befähigt sie dann, sie als ausdrückliche Operation durchzuführen. (S. 268)

Piaget und Szeminska (1975) schrieben den Kindern bereits ab 5 bis 6 Jahren die Fähigkeit zu, erste multiplikative Aufgaben mit der *one-to-many correspondence* zu meistern, obschon sich gemäss Piagets Stufentheorie die Fähigkeit zum proportionalen Denken erst mit 10 bis 11 Jahren ausbildet. Auch Frydman und Bryant (1988) sprachen bereits 5-jährigen Kindern das Verständnis über (primitive) multiplikative Beziehungen zu. Dies untersuchten sie, indem sie Sets auf der Basis der *one-to-many correspondence* zuordnen liessen. Dabei gelang es den Kindern, Sets mit gleichen Einheiten zu bilden und proportionale Urteile zu fällen.

Confrey (1994) sieht das Verständnis von Ratio und Proportion ebenfalls als wichtigen Unterschied zwischen dem additiven und dem multiplikativen Denken. Dieses Wissen über die Invarianz von zwei Grössen erfordert fortgeschrittene kognitive Leistungen. Da nach ihr multiplikative Modelle, welche auf dem einzelnen Zählen oder der wiederholten Addition basieren, nicht jedes Verhalten der Kinder erklären können, entwickelte sie komplementär zur wiederholten Addition ein alternatives Modell der Multiplikation.

> Rather than view multiplication as solely derived from repeated addition, we propose that splitting is a primitive model for multiplication and division (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985) and a precursor to ratio. This mathematical construction is missing from the official accounts of mathematics in schools. (Confrey & Smith, 1995, S. 67)

Splitting definierte Confrey (1994) folgendermassen: „Splitting can be defined as an action of creating simultaneously multiple versions of an original, an action often represented by a tree diagram" (S. 292). Das Ziel des splittings ist, gleich grosse Gruppen zu bilden. Im ersten Stadium werden diese Gruppen einander Stück-für-Stück zugeordnet. In einem weiteren Schritt werden sie mit einer bestimmten Anzahl von Elementen einer anderen Gruppe in Relation gesetzt, was der *one-to-many correspondence* von Nunes und Bryant (1998) entspricht. Steffe (1992, 1994) nannte diese Zuordnung *units-coordinating scheme,* die Koordination oder Verteilung von Einheiten auf andere Einheiten.

In der Literatur existieren einige Untersuchungen zu Aufgaben, welche proportionales Denken erfordern. Oft konnten bereits Kinder im Kleinkindalter dazu korrekte Urteile abgeben, ohne dass Zählhandlungen vorgenommen wurden (vgl. McCrink & Spelke, 2010; Sophian, 2000). Auch Sera, Troyer und Smith (1988) zeigten, dass selbst zweijährige Kinder nicht nur nach der Grösse einteilen, sondern Beziehungen bilden. Sie fällten z.B. richtige Urteile darüber, ob ein Shirt zu gross für eine Puppe oder zu klein für eine erwachsene Person ist.

Singer et al. (1997) erweiterten die Theorie von Resnick (1992), welche sich mit extensiven Quantitäten und somit additiven algebraischen Konzepten befasst (siehe Kapitel 2.2), auf die Entwicklung von intensiven Quantitäten. Bei diesen protoquantitativen Schemata, welche sich nicht additiv verhalten, sondern sich immer auf zwei Einheiten beziehen, muss somit die Beziehung zwischen zwei Beträgen verstanden werden, z.B. km/h beschreibt die Beziehung zwischen einer Distanz und der Zeit (Nesher, 1988). Singer et al. (1997) gehen davon aus, dass die intuitiven Formen des proportionalen Denkens bereits bei sehr jungen Kindern vorhanden sind. Sie helfen ihnen, Urteile zu fällen, welche mathematisch als Ratio, Proportion oder Funktionen beschrieben werden. Die Entwicklung dieser frühen Konzepte der Kinder erfolgt durch Erfahrungen im Alltag mit der physikalischen und sozialen Welt. Wie auch die Urteile zur Grösse erfolgen Urteile über Ratio oder Proportionen zuerst über die direkte Wahrnehmung und bilden eine Art Körperwissen. Später wird dieses Wissen in quantifizierte, mathematisch exakte Formen von Repräsentationen und Beurteilungen hinausgetragen, und die Fähigkeit, eine Beziehung zwischen zwei separaten Beträgen zu erkennen, wird entwickelt. Danach werden die protoquantitativen Schemata mit dem Wissen über multiplikative Beziehungen zwischen Zahlen quantifiziert. Die neuen quantifizierten Schemata beinhalten die originalen Beziehungen und erlauben den Kindern numerisch exakte Urteile zu Ratios. Nach Singer et al. (1997) werden die protoquantitativen Schemata auch nach der Entwicklung des numerischen Verständnisses noch aufrechterhalten.

Skalarfaktor

Nunes und Bryant (1998) beschreiben in ihrem *Set of number meanings*, welches für das multiplikative Verständnis neu erlernt werden muss, drei Unterschiede zur Addition: das Wissen um die Beziehung zwischen zwei Zahlen, das Wissen um die Konstanz dieses Verhältnisses und das Wissen um die Anzahl der Replikationen der Verhältnisse. Die Anzahl Replikationen wird auch als Skalarfaktor bezeichnet, das konstante Verhältnis ist der funktionale Faktor. Nach Singer et al. (1997) müssen Kinder für das proportionale Denken *within* und *across measure space*s urteilen können. Karplus, Pulos und Stage (1983) unterscheiden zwischen *within-Strategien* und *between-Strategien*. Es ist damit jedoch immer das funktionale und das skalare Modell der Multiplikation gemeint, welches in Abbildung 3 verdeutlicht wird. Beim skalaren Faktor geht es um den Vergleich zwei gleicher Ratios miteinander. Dabei wird eruiert, wie viele Male ein Verhältnis repliziert werden muss bzw. wie diese Verhältnisse zusammenhängen. Im vorliegenden Beispiel wäre dies die Beziehung der Autos oder der Räder zueinander. Wenn z.B. 1 Auto vier Räder hat, haben 3 Autos 3-mal mehr Räder, 3 wäre somit der Skalarfaktor. Nunes und Bryant (1998) beschreiben diesen folgendermassen: „A scalar factor is neither about cars nor about wheels; it does not refer to the number of objects in the sets but to the number of replications relating two set sizes of the same type" (S. 146). Der funktionale Faktor stellt die Beziehung oder die Konstruktion der intensiven Quantität dar, 1 Auto hat 4 Räder, also sind es in vorliegendem Beispiel jeweils 4-mal mehr Räder als Autos. Richtige Kompetenzen im proportionalen Denken und Urteilen erfordern somit neben dem Erkennen von Verhältnissen auch skalares und funktionales Wissen.

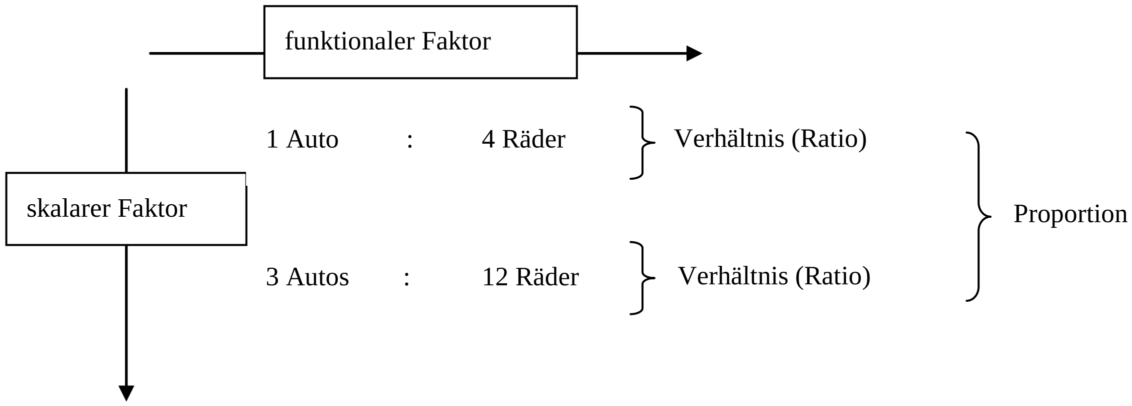


Abbildung 3. Unterscheidung zwischen skalarem und funktionalem Faktor sowie zwischen Verhältnis (Ratio) und Proportion, adaptiert an Nunes und Bryant (1998, S. 149).

Nunes, Schliemann und Carraher (1993) untersuchten die Strategien von brasilianischen Fischern ohne formale Ausbildung bei ihren Berechnungen über die Beziehungen zwischen verarbeiteten und unverarbeiteten Meeresfrüchten. Die Fischer benutzten zur Lösung dieser proportionalen Rechnungen multiplikative Beziehungen, machten die Transformationen jedoch zwischen den extensiven Quantitäten und nicht indem sie eine intensive Quantität kreierten. In dieser Untersuchung konnte gezeigt werden, dass trotz fehlender formaler Bildung multiplikative Beziehungen verstanden wurden und dass dabei das skalare Modell bevorzugt wurde. Die Resultate von Vergnaud (1983) zeugten ebenfalls von einer Präferenz für das skalare Verständnis. Andere Untersuchungen gehen jedoch davon aus, dass die

Anwendung der skalaren oder funktionalen Strategie mit der Problemstellung zusammenhängt (vgl. Karplus, et al., 1983; Silvestre & da Ponte, 2011; Tourniaire, 1986).

Nach Tourniaire und Pulos (1985) ist bei Kindern und oft auch bei Erwachsenen die dominante Strategie zur Lösung von proportionalen Aufgaben (auf dem skalaren oder auf dem funktionalen Weg) nicht die multiplikative, sondern die *building-up* Strategie. Damit ist gemeint, dass das erste Verhältnis erkannt und das zweite daraus mit einer additiven Strategie berechnet wird. So kann z.B. die Aufgabe: „2 Bonbons kosten 6 Rappen, wie viel kosten 6 Bonbons?“ nicht nur multiplikativ mit dem Faktor 3 berechnet, sondern auch mit der wiederholten Addition gelöst werden (4 Bonbons kosten 12 Rappen und 6 Bonbons kosten 18 Rappen).

Vergleich wiederholte Addition vs. proportionale Modelle

Park und Nunes (2001) untersuchten bei 6- bis 7-jährigen Kindern, ob das ursprüngliche Konzept der Multiplikation eher auf dem Verständnis der wiederholten Addition basiert oder den Ursprung im Korrespondenzschema hat. Dazu teilten sie Primarschulkinder, welche in der Schule noch nicht multiplizieren gelernt hatten, in zwei Gruppen ein. Mit der einen Gruppe wurde die Multiplikation über die wiederholte Addition eingeführt und mit der anderen Gruppe mit dem Korrespondenzschema, wobei das Schwergewicht auf dem Verständnis des konstanten Verhältnisses zwischen zwei Grössen lag. Sie untersuchten somit, ob sich die Multiplikationsleistungen der Kinder verbessern, wenn Aufgaben mit der wiederholten Addition geübt werden, oder ob das Üben von Verhältnissen für die Leistungen förderlicher ist. Die Aufgaben des Prä- und Posttests bestanden aus Additions- und aus Multiplikationsaufgaben. Die Resultate zeigten, dass Kinder aus der Korrespondenzschema-Gruppe signifikant grössere Fortschritte beim Lösen der Multiplikationsaufgaben machten. Park und Nunes (2001) schlossen daraus: “…the origin of the concept of multiplication is in the schema of correspondence rather than in the idea of repeated addition” (S. 763). Nach ihnen ist daher das Wissen um ein konstantes Verhältnis zwischen zwei Variablen *the core meaning* des Konzepts der Multiplikation und die wiederholte Addition lediglich eine Kalkulationsstrategie.

2.4 Exkurs: Die Multiplikation im schulischen Unterricht

In der Schweiz wird im Mathematikunterricht des zweiten Schuljahrs zuerst der Zahlenraum auf 100 erweitert, danach folgt die Einführung der Multiplikation. Zwar kommen bereits in der ersten Klasse Elemente der wiederholten Addition vor, diese sind jedoch noch dem additiven Denken zuzuordnen. Es ist wichtig, dass die Lehrpersonen die Multiplikation den Kindern über verschiedene Wege beibringen, so wird z.B. empfohlen, die Kinder auf multiplikative Strukturen in der Umwelt aufmerksam zu machen. Dabei sollte die Lehrperson darauf achten, dass diese Strukturen die ganze Breite der Modell- oder Grundvorstellungen der Multiplikation repräsentieren und nicht nur die der wiederholten Addition (Krauthausen & Scherer, 2007).

Modellvorstellungen der Multiplikation

In der Mathematik-Didaktik werden drei Modellvorstellungen der Multiplikation unterschieden: das zeitlich-sukzessive Modell, das räumlich-simultane Modell und das kartesische Produkt, wobei letzteres in der zweiten Klasse noch nicht behandelt wird (vgl. Krauthausen & Scherer, 2007; Lorenz & Radatz, 1993; Oehl, 1962; Radatz, Schipper, Dröge, & Ebeling, 1998). Radatz et al. (1998) schlagen vor, dass die Multiplikation zuerst durch multiplikative Handlungen gemäss zeitlich-sukzessivem Modell eingeführt wird und danach Punktbilder (räumlich-simultan) untersucht und interpretiert werden. Diese sehen sie als didaktische Hilfsmittel besonders gut für die Darstellung von Multiplikationsaufgaben geeignet.

Das zeitlich-sukzessive Modell. Dieses dynamische Modell beschreibt die Multiplikation als fortgesetzte Addition. Das Produkt entsteht im Laufe der Zeit, sukzessiv, indem die gleiche Anzahl Einheiten zur Gesamtzahl zusammengefügt werden. Dies kann im Unterricht durch Handlungen aktiv durchgespielt werden. Ein Beispiel hierzu wäre: Susi fasst 4-mal in einen Beutel und holt jeweils 5 Kastanien heraus.

Das räumlich-simultane Modell. Bei diesem Modell wird die Gesamtmenge simultan als Ganzes dargestellt, oft wird dafür die Felddarstellung benutzt. Aufgaben dieses Typus sind statisch, zum Beispiel: Auf einem Tisch stehen 4 Teller mit je 5 Keksen.

Das kartesische Produkt. Bei diesem Modell geht es um den kombinatorischen Aspekt. Oft erfolgt diese Art von Aufgaben mit Fragen zur Kombination von Kleidern. Zur Darstellung eignen sich Baumdiagramme. Ein Beispiel: Franz hat 4 Pullis und 5 Hosen. Wie viele verschiedene Kombinationsmöglichkeiten hat er zum Anziehen?

Ruwisch (2001) betont, dass sowohl beim zeitlich-sukzessiven als auch beim räumlich-simultanen Modell vorausgesetzt wird, dass gleich grosse Einheiten gebildet und vereinigt werden können. Somit wären nach ihr diese beiden Modelle als wiederholte Addition zu sehen. Die Förderung des multiplikativen Verständnisses erfordert nach ihr Situationen mit einfachen Proportionalitätsaufgaben und das Bearbeiten von Aufgaben mit kombinatorischen Aspekten. Moser Opitz (2007) zieht aus Praxiserfahrungen mit lernschwachen Schülerinnen und Schülern den Schluss: "Bei einer einseitigen Gewichtung des zeitlich-sukzessiven Modells wird das Verständnis des „Malnehmens“ häufig nicht aufgebaut. Die Schülerinnen und Schüler verstehen die Multiplikation nur als Addieren von gleichen Summanden und tun dies zählend“ (S. 107). Nach ihr wird das multiplikative Verständnis, wie es Park und Nunes (2001) definieren, bereits durch Aufgaben im Sinne des räumlich-simultanen Aspektes gefördert.

Das kleine Einmaleins[1]

Zur Einführung des kleinen Einmaleins wird den Lehrpersonen empfohlen, mit den Kindern zuerst die Kernaufgaben (Einer-, Zweier-, Fünfer- und Zehnerreihe, auch Königsaufgaben genannt) zu lernen und dann über Zerlegen, Verdoppeln oder Umkehren die anderen Aufgaben abzuleiten. Es wird viel Wert darauf gelegt, dass die Zusammenhänge und Beziehungen der Reihen entdeckt werden. Dabei sind auch die drei Rechengesetze Kommutativ[2]-, Assoziativ[3]- und Distributivgesetz[4] wichtig, denn wenn die Kinder auswendig lernen und nur das Produkt kennen, können sie eine andere Rechnung nicht daraus ableiten und sind daher sehr anfällig für Fehler. Für das Beibringen des Kommutativgesetzes sind Punktefelder sehr hilfreich (Lorenz & Radatz, 1993; Wittmann & Müller, 1990).

---

[1] unter Einmaleinsaufgaben sind die möglichen Verknüpfungen der Zahlen 1 bis 10 gemeint.
[2] auch Vertauschungsgesetz genannt (z.B. 3 x 5 = 5 x 3)
[3] auch Verbindungsgesetz genannt (z.B. 2 x (3 x 4) = 3 x (2 x 4))
[4] auch Verteilungsgesetz genannt (z.B. 3 x 5 = 2 x 5 + 1 x 5)

Die Automatisierung der Reihen ist nicht gänzlich aus dem Unterricht zu verbannen, es schliesst sich nicht aus, dass auch einzelne Reihen auswendig gelernt werden. Dies sollte jedoch nur unter der Voraussetzung erfolgen, dass die Kinder ein gesichertes Verständnis besitzen und Zusammenhänge erkennen können (Selter, 1994; Wittmann & Müller, 1990). Das Ableiten der Multiplikation aus bekannten Einmaleinsaufgaben wäre gemäss den vorgängig erwähnten Lösungsstrategien der Multiplikation (Tabelle 1) zwischen der wiederholten Addition und dem auswendigen Beherrschen der Multiplikationsaufgaben einzuordnen (Ruwisch, 2001).

Darstellungsformen von Multiplikationsaufgaben

Bruner, (1966, zitiert nach Mason & Johnston-Wilder, 2004) unterscheidet mit Bezug auf die Darstellung von Mathematikaufgaben drei Ebenen: die enaktive, die ikonische und die symbolische Ebene. Diese bauen aufeinander auf, wobei Kinder diese Phasen zu unterschiedlichen Zeiten durchlaufen können. Die enaktive Ebene betrifft die Handlungsphase, in der mit konkretem Material gearbeitet wird. Die ikonische Ebene bezieht sich auf die bildhafte Darstellung einer Aufgabe mittels Abbildungen und Zeichnungen, und auf der symbolischen Ebene werden Aufgaben in abstrakter Form durch Zahlen oder sprachlich dargestellt.

Rechteckflächen

Die Fläche spielt in der Schulmathematik eine wichtige Rolle. Sie wird z.B. in Form eines Punktefeldes für den Unterricht benutzt, um die Multiplikation zu erklären (räumlich-simultanes Modell). Mit dieser Darstellungsform lassen sich die Vergrösserung der algebraischen Multiplikation sowie die Rechengesetze bildhaft darstellen.

Auch Nunes und Bryant (1998) betonen die Wichtigkeit des Flächenkonzepts für die Multiplikation, da zur Berechnung der Fläche die Flächeneinheiten gezählt oder die Länge und Breite miteinander multipliziert werden können. Huang (2010) zeigte in ihrer Untersuchung einen Zusammenhang zwischen dem Verständnis der Multiplikation und dem der Flächenformel. Kinder, welche die Flächenformel verstehen, haben nach ihr ein besseres multiplikatives Verständnis. Outhred und Mitchelmore (2000) zeigten aufgrund von Interviews mit Kindern der 3. Klasse, dass die Qualität des Verständnisses der Multiplikation mit ihrer Leistung beim Flächenmessen und ihrem Verständnis der

Flächenformel eines Rechtecks zusammenhängt. Kinder, welche kein multiplikatives Verständnis hatten, verstanden auch die Bedeutung der Flächenformel eines Rechtecks nicht. Nach Outhred und Mitchelmore (2000) ist es wichtig, dass die Kinder die räumliche Struktur eines Gitters verstehen und linear messen können. Die Flächenmessung muss somit mit der linearen Messung und multiplikativen Konzepten verlinkt werden, bevor die Bedeutung der Flächenformel gelernt werden kann. Nach ihnen könnte das Flächenkonzept im schulischen Unterricht durchaus früher eingeführt werden. Für Battista, Clements, Arnoff, Battista und Borrow (1998) ist das konzeptuelle Verständnis der räumlichen Strukturierung eines Rechtecks wichtig:”If students do not see a row-by-column structure in these arrays, how can using multiplication to enumerate the objects in the arrays, much less using area formulas, make sense to them?“ (S. 531).

Das Verständnis von Rechteckflächen scheint aufgrund der erwähnten Untersuchungen wesentlich mit dem multiplikativen Verständnis zusammenzuhängen. Diese Darstellungsform bietet sich zur Veranschaulichung der Multiplikation an, da damit die Flächenberechnung mittels wiederholter Addition und durch die Multiplikation von Länge und Breite einander gegenübergestellt werden können.

2.5 Zusammenfassung und Überleitung zum empirischen Teil

In einer Vielzahl von Studien im Rahmen der Informationsintegrationstheorie nach Anderson (1981, 1996) konnte gezeigt werden, dass intuitive Schätzungen nach algebraischen Regeln erfolgen, wobei diese oft nicht der physikalisch korrekten Verknüpfungsregel entsprechen. Selbst in jungen Jahren sind Kinder dennoch fähig, mehrere Dimensionen gleichzeitig zu beachten und in ihr Urteil zu integrieren.

Bei der intuitiven Schätzung von Rechteckflächen ergaben sich bei jüngeren Kindern oft Fehlurteile, da sie die Länge und die Breite nach einer additiven Regel verknüpften. Innerhalb der Informationsintegrationstheorie wird die additive Verknüpfungsregel als Vereinfachungs- oder Vorläuferstrategie zur multiplikativen Regel gesehen (Wilkening, Schwarzer, & Rümmele, 1997). Der Übergang von einer falschen additiven Verknüpfung der beiden Dimensionen zur normativen multiplikativen Integrationsregel erfolgt am wahrscheinlichsten zwischen dem 8. und 10. Lebensjahr. Die Bedingungen für diesen Wechsel sind weitgehend unklar, am ehesten konnte bisher eine Veränderung der intuitiven Verknüpfungsregeln durch eine Vertrautheit mit dem Stimulusmaterial bewirkt werden (Wolf, 1995).

Untersuchungen im Bereich der intuitiven Physik haben gezeigt, dass das intuitive Wissen der Kinder oft nicht mit dem expliziten Wissen übereinstimmt. Häufig wurde richtiges intuitives Wissen und falsches explizites Wissen in derselben Person im selben Bereich entdeckt. Diese Wissensdissoziationen können selbst bei Erwachsenen vorhanden sein (Krist, et al., 1993). Ein korrektes Wissen (intuitiv oder explizit) garantiert keinen Transfer in den anderen Bereich (Wilkening, et al., 1997). Es existieren zwar Hinweise auf einen Zusammenhang zwischen intuitiven Verknüpfungsregeln und explizitem Wissen, jedoch ist ungeklärt, wie dieser genau aussieht. Hinweise auf einen Alterseffekt lieferte Rümmele (1993), indem sie in ihrer Studie zeigen konnte, dass ein Training, welches auch explizite Informationen enthielt, bei älteren Kindern nachhaltiger war als bei den jüngeren.

Der Übergang vom additiven zum multiplikativen Verständnis scheint in der Entwicklung des mathematischen Denkens ein wichtiger Schritt zu sein. Bereits Piaget (1987) sprach diesbezüglich von einem qualitativen Wechsel im Denken der Kinder. Es erstaunt daher nicht, dass schlechte Multiplikationsleistungen auch mit dem Fehlen einer multiplikativen Struktur zusammenhängen (vgl. Clark & Kamii, 1996; Mulligan, 2002). Das Lösen einer multiplikativen Aufgabe kann mit der Strategie der wiederholten Addition oder direkt multiplikativ erfolgen. Mulligan und Mitchelmore (1997) konnten zeigen, dass das Verwenden der Strategie der wiederholten Addition auch mit dem Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe zusammenhängt.

Sowohl bei den intuitiven multiplikativen Verknüpfungsregeln als auch bei der Entwicklung des multiplikativen Verständnisses bildet die Addition eine Vorläufer- oder Vereinfachungsstrategie. Der Übergang von der additiven zur multiplikativen Verknüpfungsregel bei der Schätzung von Rechteckflächen erfolgt zwischen 8 und 10 Jahren. In dieser Zeit wird im schulischen Unterricht die Multiplikation eingeführt. Da bisher noch nicht untersucht wurde, ob dieses neu erworbene explizite Wissen eine Veränderung der intuitiven Verknüpfungsregeln hervorbringt oder ob dies unabhängig vom expliziten Wissen geschieht, widmet sich ein grosser Teil der vorliegenden Arbeit dieser Fragestellung. Bereits Resnick (1989) betonte, dass es nicht klar ist, welche Rolle die formale Instruktion (in der Schule oder in der Familie) bei der Entwicklung der multiplikativen Denkschemas spielten.

Das Untersuchen der intuitiven Verknüpfungsregeln anhand der Schätzung von Rechteckflächen erscheint sinnvoll, zumal das Verständnis der Flächenformel mit dem multiplikativen Verständnis zusammenhängt. Nach Tirosh und Graeber (1994) können Flächenmodelle helfen, Misskonzepte zur Multiplikation zu überwinden. Daher liegt die Fragestellung nahe, ob ein intuitives Verständnis der Flächenformel in Form einer multiplikativen Verknüpfungsregel auch mit einem besseren numerischen Wissen der Multiplikation einhergeht. Zwecks der Überprüfung des numerischen Wissens wurden die untersuchten Kinder angehalten, verschiedene Multiplikationsaufgaben zu lösen. Es wurden Aufgaben zum zeitlich-sukzessiven Modell sowie zum räumlich-simultanen Modell verwendet, sowohl auf der ikonischen als auch auf der symbolischen Ebene. Zusätzlich wurden den Kindern Aufgaben zum Korrespondenzschema sowie Einmaleinsaufgaben gestellt. Letztere wurden in der Rekonstruktionsform präsentiert: Es wurde das Produkt gezeigt, und die dazugehörige Aufgabe musste herausgefunden werden.

Im den folgenden Kapiteln werden zwei empirische Untersuchungen der vorliegenden Arbeit ausführlich vorgestellt. In der ersten Untersuchung geht es einerseits um die Veränderung der intuitiven Verknüpfungsregeln bei der Schätzung von Rechteckflächen durch die Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht sowie um den Zusammenhang dieser Verknüpfungsregeln mit den expliziten Leistungen bei multiplikativen Aufgaben. In der zweiten Untersuchung wurde mit verschiedenen Interventionen versucht, die intuitiven Integrationsregeln zu verändern. Die präzisen Fragestellungen werden jeweils vor der genauen Beschreibung der empirischen Untersuchung erläutert.

3 Empirische Untersuchung 1: Zusammenhang zwischen intuitiven Regeln und numerischen Fähigkeiten

3.1 Einleitung und Fragestellung

Wie bereits vorgängig beschrieben, erfolgt der Übergang von einer intuitiven additiven Verknüpfungsregel zur normativen multiplikativen Regel bei der Flächenschätzung am wahrscheinlichsten zwischen 8 und 10 Jahren. In dieser Zeit findet auch im schulischen Unterricht die Einführung der Multiplikation statt.

Ziel dieser quasi-experimentellen Studie war es, zu untersuchen, ob die Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht eine Veränderung der intuitiven Verknüpfungsregeln bei der Schätzung von Rechteckflächen bewirkt. Des Weiteren wurden Zusammenhänge zwischen intuitiven Verknüpfungsregeln und dem numerischen multiplikativen Wissen untersucht. Während in bisherigen Untersuchungen explizites Wissen meist über die verbalen Urteile von Kindern gemessen wurde, legte die vorliegende Untersuchung den Fokus auf die Leistungen der Kinder bei unterschiedlichen Multiplikationsaufgaben. Zur Erhebung der intuitiven Verknüpfungsregeln wurde ein Experiment zur Schätzung von Rechteckflächen durchgeführt, welches sich in der Anwendung innerhalb der Entwicklungspsychologie bewährt hat und in verschiedenen Studien verwendet wurde (vgl. Anderson & Cuneo, 1978; Wilkening, 1978, 1979; Wolf, 1995).

Die erste empirische Untersuchung gliedert sich in drei Teile: Der erste Teil befasst sich mit den intuitiven Verknüpfungsregeln und dem multiplikativen Vorwissen von Kindern in der zweiten Klasse, bevor die Multiplikation im schulischen Unterricht eingeführt wurde. Im zweiten Teil geht es um den Zusammenhang zwischen den intuitiven Verknüpfungsregeln und dem expliziten numerischen Wissen nach der Einführung der Multiplikation und im dritten Teil werden die Veränderungen der intuitiven Verknüpfungsregeln nach dem Erlernen der numerischen Multiplikation im schulischen Unterricht beschrieben. Die Datenerhebung fand zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten statt.

3.2 Methode

3.2.1 Versuchspersonen

Zum ersten Untersuchungszeitpunkt, bevor die Multiplikation im schulischen Unterricht eingeführt wurde, nahmen 87 Kinder aus zweiten Primarschulklassen teil. Diese waren aus vier verschiedenen Schulhäusern des Kantons Zürich sowie einem Schulhaus im Kanton Aargau. Die Schulhäuser wurden zufällig ausgewählt. Sämtliche untersuchten Kinder hatten die schriftliche Erlaubnis der Eltern, um an der Studie teilzunehmen.

Zum zweiten Untersuchungszeitpunkt, nach der Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht, wurden insgesamt 91 Kinder untersucht. Diese Zahl setzte sich zusammen aus den 87 Kindern, welche bereits zum ersten Untersuchungszeitpunkt untersucht wurden, sowie vier weiteren Kindern, einem Mädchen und drei Knaben. Diese vier Kinder konnten bei der ersten Erhebung aus Krankheitsgründen nicht teilnehmen. Sie wurden jedoch nicht in die Auswertung miteinbezogen, zumal ihre Daten für die Vorher-Nachher-Untersuchungen nicht ausgewertet werden konnten und da sie aufgrund der einmaligen Untersuchung bei der Schätzung der Rechteckflächen von einem allfälligen Wiederholungseffekt nicht hätten profitieren können.

So bestand die Gesamtstichprobe zur Prüfung der Veränderungen der intuitiven Verknüpfungsregeln schlussendlich aus 87 Kindern, welche aus vier verschiedenen Schulklassen aus dem Kanton Zürich sowie einer Klasse aus dem Kanton Aargau stammten. Das Geschlechterverhältnis war ausgeglichen, 44 Mädchen und 43 Knaben. Der Altersmittelwert zum ersten Untersuchungszeitpunkt war 8 Jahre, 5 Monate (Altersbereich: 7;6 - 9;8 Jahre) zum zweiten Untersuchungszeitpunkt 8 Jahre, 9 Monate (Altersbereich: 7;10 – 10 Jahre).

3.2.2 Versuchsplan

Zu beiden Untersuchungszeitpunkten schätzten die Kinder die Grösse verschiedener Rechteckflächen auf einer linearen Skala. Anhand dieser Urteile wurden ihre intuitiven Verknüpfungsregeln bestimmt. Zusätzlich mussten sie einfache Multiplikationsaufgaben lösen, welche der Überprüfung der numerischen Fähigkeiten dienten. Während die

Multiplikationsaufgaben zu den beiden Untersuchungszeitpunkten variierten, war die Aufgabe zur Flächenschätzung beide Male dieselbe. Abbildung 4 stellt den Versuchsplan graphisch dar.

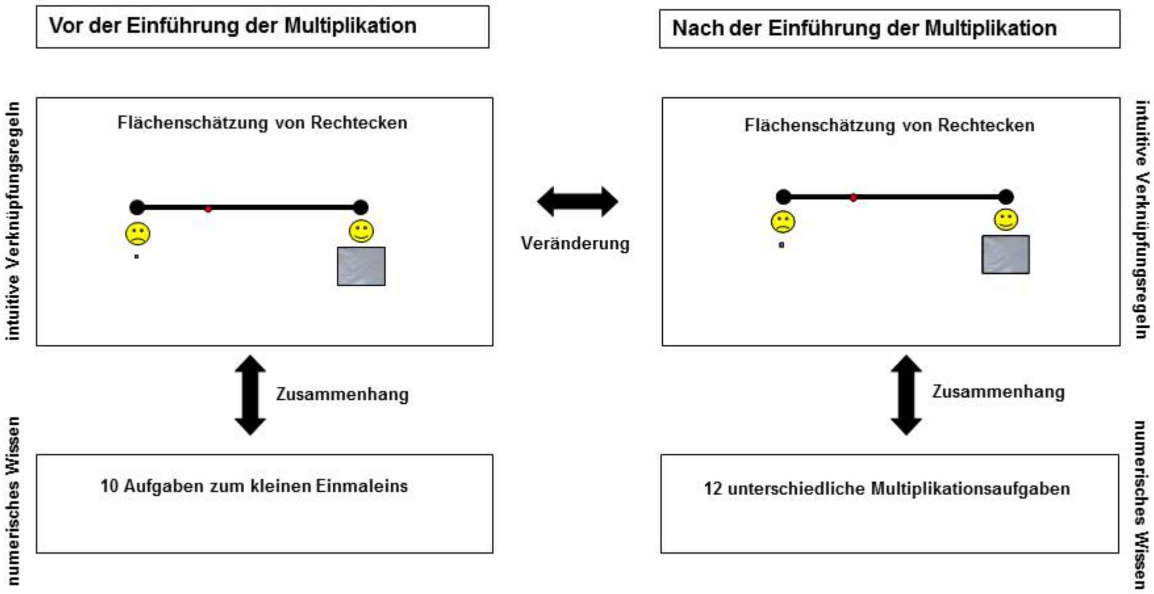


Abbildung 4. Graphische Darstellung des Versuchsplans. Auf der linken Seite ist der Ablauf vor der Einführung der Multiplikation zu sehen, auf der rechten Seite der Ablauf nach der Einführung der Multiplikation.

3.2.3 Versuchsmaterial

Schätzung von Rechteckflächen

Als Stimuli wurden hölzerne Rechteckflächen mit einer Dicke von 8 mm benutzt. Diese wurden mit Alufolie eingewickelt, damit sie Schokoladetafeln ähnelten. Die Oberfläche war flach, es war keine Gitterstruktur erkennbar. Die Längen und die Breiten waren jeweils 4 cm, 8 cm, 12 cm oder 16 cm lang; die Kinder schätzten auf einer Skala die Rechtecke mit allen Kombinationen der 4 Dimensionen. Die insgesamt 16 Flächen wurden von den Kindern jeweils zweimal beurteilt, wodurch sich 32 verschiedene Schätzwerte ergaben. Abbildung 5 zeigt die verschiedenen Rechteckflächen. Die Quadrate mit der Grösse 2 x 2 cm sowie mit 18 x 18 cm wurden als Ankerstimuli für die Antwortskala benutzt.

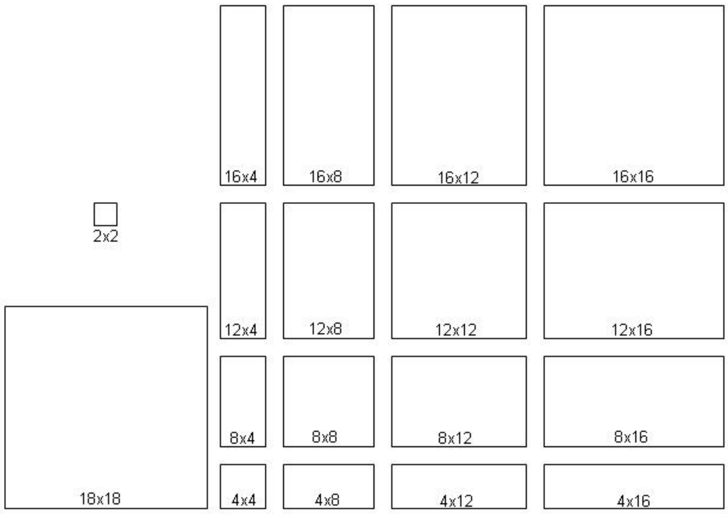


Abbildung 5. Länge und Breite der präsentierten Rechteckflächen in cm.

Die Versuchsanordnung der Stimuli war vor und nach der Einführung der Multiplikation die gleiche. Sie wird deshalb an dieser Stelle stellvertretend für beide Untersuchungszeitpunkte beschrieben.

Antwortskala. Die intuitiven Schätzungen der Rechteckflächen wurden mit einer nichtnumerischen Skala erhoben (Abbildung 6). Diese Antwortskala war 100 cm lang und zeigte auf der linken Seite ein weinendes und auf der rechten ein lachendes Gesicht. Die visuelle Andeutung der „Glücklichkeit" wurde durch einen von links nach rechts grösser werdenden Streifen unterstützt. Auf der Rückseite der Skala befand sich ein Messband mit Angaben in cm, welches nur für die Versuchsleiterin sichtbar war. Ein verstellbarer Metall-Schieber befand sich auf der Vorderseite der Skala. Die Verwendung einer solchen „Glücklichkeits-Skala" zur Schätzung von Quantitäten hat sich in Untersuchungen, welche im Rahmen der Informationsintegrationstheorie durchgeführt wurden bewährt (vgl. Anderson & Cuneo, 1978). Ein wichtiger Aspekt bei dieser Antwortart ist die Verwendung von zwei Ankerstimuli. Diese geben den Referenzrahmen an und sind somit etwas grösser als der grösste und etwas kleiner als der kleinste verwendete Experimentalstimulus. Durch deren Platzierung am Anfang und am Ende der Skala werden Decken- sowie Bodeneffekte vermieden (Wilkening, Becker, & Trabasso, 1980). In der vorliegenden Untersuchung wurde neben dem lachenden Gesicht ein 18 x 18 cm grosses Quadrat hingelegt, am Anfang der Skala, neben dem traurigen Gesicht, befand sich ein 2 x 2 cm grosses Quadrat.

Abbildung 6. Graphische Antwortskala, welche für das Experiment zur Schätzung der Rechteckflächen benutzt wurde.

Multiplikationsaufgaben vor der Einführung der Multiplikation

Zusätzlich zur Schätzung der Rechteckflächen lösten die Kinder ein Arbeitsblatt mit zehn Multiplikationsaufgaben zum kleinen Einmaleins (siehe Anhang 1). Dadurch zeigte sich, ob bereits multiplikative Kenntnisse vorhanden waren, obwohl die Multiplikation im schulischen Unterricht noch nicht eingeführt worden war.

Die Aufgaben wurden so ausgewählt, dass jede Zahl von 1 - 10 einmal als Multiplikand (Operand) und einmal als Multiplikator (Operator) vorkam. Ein weiteres Kriterium war, dass die beiden miteinander zu multiplizierenden Zahlen nicht dieselben waren. Um Reihenfolgeneffekte zu vermeiden, wurden sie in zwei unterschiedlichen Reihenfolgen dargeboten.

Multiplikationsaufgaben nach der Einführung der Multiplikation

Zum zweiten Untersuchungszeitpunkt, nach der Einführung der Multiplikation, lösten die Kinder 12 Multiplikationsaufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad. Diese Aufgaben, welche im Folgenden genauer erläutert werden, teilten sich in sechs Aufgabentypen zu je zwei Aufgaben auf. Sie wurden in drei unterschiedlichen Reihen-folgen präsentiert.

Zu Beginn wurden die Kinder jeweils gebeten, in Viererschritten zu zählen. Diese Aufgabe diente als Einstieg in die Thematik. Während die Kinder die Zahlen aufsagten, wurde ihr Zählschema beobachtet (siehe Abbildung 2). Es wurde protokolliert, ob sie die Zahlen einzeln zählten (z.B. die Zahlen leise aufzählen und jede vierte Zahl laut aussprechen), ob sie rhythmisch zählten (z.B. in Zweierschritten und jede zweite Zahl betonen) oder ob sie die Reihe auswendig aufsagen konnten. Zusätzlich wurde beobachtet, ob sie die Finger als Hilfe benutzten.

Bei der Auswahl der Aufgaben wurde darauf geachtet, dass möglichst viele verschiedene Modelle und Darstellungsformen der Multiplikation getestet werden konnten. In Abbildung 7 sind die Aufgabentypen dargestellt. Die Aufgaben wurden einerseits nach den drei Modellvorstellungen der Multiplikation in „zeitlich-sukzessiv“, „räumlich-simultan“ und „kartesisches Produkt“ eingeteilt (siehe Exkurs, Kapitel 2.4). Da Aufgaben zum kartesischen Produkt erst nach der zweiten Klasse eingeführt werden, wurden diese weggelassen. Die zeitlich-sukzessiven und räumlich-simultanen Aufgaben wurden sowohl bildhaft als auch symbolisch dargestellt. Zusätzlich wurden zwei weitere Aufgabentypen verwendet, welche weitere Aspekte der Multiplikation beinhalten: „Korrespondenzschema“ und „Malaufgaben finden“. Im Folgenden werden die Aufgaben genauer beschrieben und jeweils ein Beispiel dazu aufgeführt. Das ganze Aufgabenblatt, welches die Kinder lösten, ist im Anhang 2 zu finden.

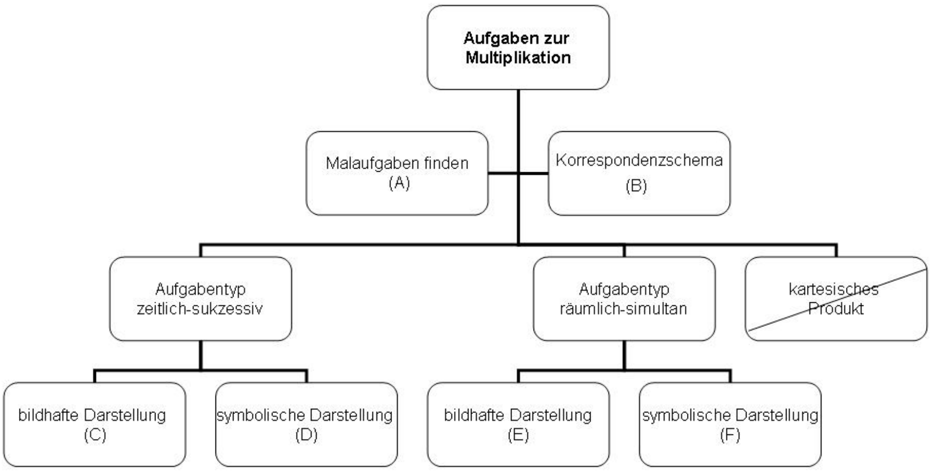


Abbildung 7. Schematische Darstellung der Multiplikationsaufgaben des Papier- und Bleistift-Tests nach der Einführung der Multiplikation.

A) Malaufgaben finden

Diese Aufgaben stammen aus dem BESMath Screening (Moser Opitz, Berger & Reusser, 2008), einem Mathematiktest, welcher die Leistungen von lernschwachen Schülerinnen und

Schülern erfasst. Den Kindern wurden die Produkte von Einmaleinsaufgaben präsentiert, und sie mussten jeweils zwei verschiedene Multiplikationsaufgaben dazu finden. Im Unterschied zum Lösen von einfachen Multiplikationsaufgaben wird bei diesem Aufgabentypus nicht nur eine auswendig gelernte Reihe abgerufen. Da diese Aufgaben nicht durch Abzählen lösbar sind, erfordern sie eine Einsicht in das multiplikative Verständnis.

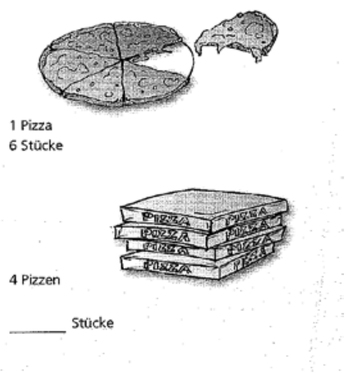
Beispiel:

vorgegeben: Produkt	*gesucht*: zwei dazugehörige Aufgaben
24	__ • __ = 24 __ • __ = 24

B) Korrespondenzschema

Wie im Theorieteil beschrieben, bildet das Erkennen einer konstanten Beziehung zwischen zwei Zahlen einen wesentlichen Unterschied zwischen dem additiven und dem multiplikativen Verständnis. Da dies bei der Lösung von Aufgaben zum Korrespondenz-schema der Fall ist, wurde dieser Aufgabentyp ausgewählt. Es wurde jeweils eine Alltags-situation bildhaft dargestellt und in Textform beschrieben. Eine der beiden Aufgaben stammt ebenfalls aus dem BESMath Sceening (Moser Opitz, et al., 2008), die andere war adaptiert an eine Aufgabe aus der Studie von Park und Nunes (2001).

Beispiel:



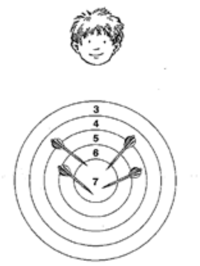
Hier siehst du eine Pizza, welche in 6 Stücke geschnitten ist. In den 4 Schachteln sind ebenfalls zerschnittene Pizzen.

Wie viele Pizzastücke hat es in allen Schachteln?

C) zeitlich-sukzessiv mit bildhafter Darstellung

Bei diesen Aufgaben wurde ein Wurfspiel graphisch dargestellt, bei welchem die Pfeile die geworfenen Punkte darstellten. Zusätzlich zum richtigen Ergebnis wurde bei dieser Aufgabe beobachtet, ob die Rechnung als Multiplikation erkannt oder ob die Aufgabe additiv gelöst wurde. Diese beiden Aufgaben stammen aus einem Lehrmittel von Scherer (2009) für Schülerinnen und Schüler mit Schwierigkeiten im mathematischen Lernen. Sie nennt diesen Aufgabentypus eine kontextbezogene Multiplikation, da die Aufgabe in eine Geschichte eingebettet ist. Zur Lösung der Aufgabe können, im Unterschied zu den Aufgaben zum Punktefeld (räumlich-simultan mit bildhafter Darstellung), nicht einfach die Punkte gezählt werden.

Beispiel:



Dieses Kind hat Pfeilwerfen gespielt und ein paar Pfeile haben das Brett getroffen.

Wie viele Punkte hat es insgesamt gesammelt?

Wie heisst die dazugehörige Rechnung?

Wie lautet das Ergebnis?

D) zeitlich-sukzessiv mit symbolischer Darstellung

Diese Aufgaben, bei welchen eine sich wiederholende Handlung beschrieben wird, wurden in reiner Textform präsentiert. Die Aufgabenstellung musste aus dem Text erkannt werden.

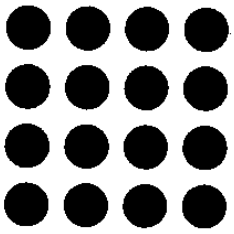
Beispiel:

Gustav geht 3-mal in den Keller und holt jeweils 5 Flaschen herauf. Wie viele Flaschen hat er insgesamt heraufgeholt?

E) räumlich-simultan mit bildhafter Darstellung

Bei diesen Aufgaben wurden Ausschnitte aus einem Punktefeld gezeigt, die Lösung war somit abzählbar. Es wurde daher zusätzlich protokolliert, wie die Kinder die Lösung berechneten. Dabei wurde unterschieden, ob sie alle Punkte einzeln zählten, die Reihen oder Spalten addierten oder die Länge und Breite miteinander multiplizierten. Beide Aufgaben stammen ebenfalls aus dem Lehrmittel von Scherer (2009).

<u>Beispiel</u>:



Wie heisst die dazugehörige Rechnung?

Wie lautet das Ergebnis?

F) räumlich-simultan symbolische Darstellung

In diesen Satzaufgaben wurde jeweils eine statische Situation beschrieben. Die Kinder mussten die Multiplikationsaufgabe aus dem Text erkennen.

<u>Beispiel</u>:

Auf einem Tisch stehen 2 Teller mit je 5 Keksen. Wie viele Kekse sind insgesamt auf dem Tisch?

3.2.4 Vorversuche

Im Vorfeld wurde mit zehn Kindern einer zweiten Klasse die gesamte Untersuchungsdauer ermittelt, damit gewährleistet war, dass sich die Kinder bis zum Schluss konzentrieren können. Des Weiteren wurde geprüft, ob es für die Kinder eventuell frustrierend sein könnte, Aufgaben aus dem kleinen Einmaleins zu lösen, zumal die meisten von ihnen mit dem Multiplikationszeichen noch nicht vertraut waren. Zuerst wurde mit ihnen das Experiment zur Schätzung der Rechteckflächen durchgeführt, danach wurden ihnen acht Einmaleinsaufgaben gestellt. Dabei zeigte sich, dass ihnen das Lösen der Aufgaben keine Probleme bereitete, egal, auf welchem Lernstand sie waren. Wenn sie nicht wussten, wie die Aufgaben zu lösen waren, suchten sie jeweils nach einer eigenen Lösungsstrategie. Aufgrund dieser Voruntersuchung wurde die Anzahl Multiplikationsaufgaben von acht auf zehn erhöht. Die Resultate dieser zehn Kinder wurden für die Auswertung nicht verwendet, da in der Halbklasse zwischen der Anfrage zur Teilnahme und der ersten Untersuchung bereits eine kurze Einführung in die Multiplikation stattgefunden hatte.

Die 12 Multiplikationsaufgaben für die Untersuchung nach der Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht wurden von 40 Kindern aus zwei verschiedenen zweiten Klassen bearbeitet. Dadurch wurde überprüft, ob die Kinder die Aufgabenstellungen verstanden und die Aufgaben selbständig bearbeiten konnten. Die Lehrpersonen berichteten, dass das Aufgabenblatt für die Schülerinnen und Schüler gut verständlich und lösbar war.

3.2.5 Versuchsdurchführung

Untersuchungszeitpunkt 1: Vor der Einführung der Multiplikation

Die Untersuchung, welche vor der Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht durchgeführt wurde, fand in den Schulklassen etwa ein halbes Jahr nach Beginn des zweiten Schuljahres statt. Die eine Hälfte der Kinder bearbeitete zuerst die zehn Mathematikaufgaben zum kleinen Einmaleins und schätzte danach die Rechteckflächen, die andere Hälfte tat dies in umgekehrter Reihenfolge. Insgesamt dauerte diese Untersuchung pro Kind zwischen 20 und 25 Minuten, je nachdem wie schnell die Aufgaben gelöst wurden. Jede Versuchsperson wurde in einem separaten Raum einzeln an einem Tisch untersucht, wobei die Versuchsleiterin ihr gegenüber sass.

Die Erklärung des Experiments zur Schätzung der Rechteckflächen erfolgte anhand einer Geschichte. Den Kindern wurde mit Hilfe der Antwortskala und der Ankerstimuli erzählt, dass ein (fiktives) Kind, welches sehr gerne Schokolade isst, verschiedene Schokoladestücke bekommen wird. Wenn diese sehr klein sind (kleiner Anker), so ist das Kind sehr traurig. Wenn sie gross sind (grosser Anker), dann ist es sehr glücklich. Die Versuchspersonen sollten nun beurteilen, wie glücklich oder traurig das Kind in der Geschichte über die präsentierten Schokoladestücke wäre, wenn es diese erhalten würde. Danach wurden sie gebeten, mit eigenen Worten wiederzugeben, warum das Kind, welches das kleine Rechteck erhält, so traurig ist. Dadurch sollte gewährleistet werden, dass die Geschichte richtig verstanden wurde. In einem weiteren Schritt wurden die Kinder gefragt, auf welchen Punkt sie zeigen würden, wenn das fiktive Kind sehr glücklich, überhaupt nicht glücklich und mittel glücklich ist. Für die darauffolgende Präsentation der 32 Rechtecke gab es zwei unterschiedliche Reihenfolgen, welchen die Kinder zufällig zugeteilt wurden. Bei jeder intuitiven Schätzung zeigten sie mit dem Metallschieber eine Position auf der Skala an. Die dazugehörige Zahl (auf der Rückseite der Skala sichtbar) notierte die Versuchsleiterin verdeckt auf einem Blatt.

Das Arbeitsblatt mit den zehn Aufgaben zum kleinen Einmaleins wurde den Kindern mit dem Hinweis verteilt, dass darauf ein Zeichen vorkomme (Multiplikationszeichen), welches sie wahrscheinlich noch nicht kennen würden. Es wurde ihnen erklärt, dass es die Versuchsleiterin interessiere, wie sie diese Aufgaben bearbeiten würden, dass sie jedoch nur diejenigen Aufgaben lösen müssten, die sie möchten. Wenn ein Kind das Multiplikationszeichen noch nie gesehen hatte, wurde es ermutigt, eine Lösungsstrategie herauszufinden. Ein Feedback, ob die Aufgaben richtig oder falsch gelöst wurden, gab es nicht. Es wurde jeweils gesagt, dass die Aufgaben sehr gut bearbeitet worden seien und dass eine interessante Strategie herausgefunden wurde. Weiter verwies man die Kinder darauf, dass sie in der nächsten Woche bei ihrer Lehrperson lernen würden, wie man mit diesem Zeichen rechnet. Die Kinder lösten die Aufgaben selbständig, teilweise bearbeiteten sie nicht alle Aufgaben. Die Versuchsleiterin war die ganze Zeit anwesend, um bei allfälligen Fragen und Problemen Auskunft geben zu können.

Untersuchungszeitpunkt 2: Nach der Einführung der Multiplikation

Nachdem die Lehrpersonen das Kapitel zur Multiplikation im Lehrmittel vollständig behandelt und somit die Multiplikation fertig eingeführt hatten, wurden die Kinder ein weiteres Mal untersucht. Wieder wurde mit der einen Hälfte der Schulklasse zuerst das Experiment zur Schätzung der Rechteckflächen durchgeführt und danach wurden 12 verschiedene Multiplikationsaufgaben gelöst, während die andere Hälfte dies in umgekehrter Reihenfolge tat. Die Untersuchung dauerte pro Kind etwa 25 Minuten. Wiederum wurde mit ihnen einzeln in einem separaten Raum gearbeitet.

Zu Beginn des Experiments zur Schätzung der Rechteckflächen wurden die Versuchspersonen gefragt, ob sie sich noch erinnern könnten, was sie beim letzten Mal gemacht hatten. Wenn sie dies richtig erklären konnten, wurden ihnen erneut die Flächen präsentiert, und sie gaben ihre Urteile auf der Antwortskala ab. Wussten die Kinder nicht mehr, was sie in der ersten Untersuchung gemacht hatten, erklärte ihnen die Versuchsleiterin den Ablauf nochmals. Da die Instruktionen die gleichen waren wie zum ersten Untersuchungszeitpunkt, werden sie an dieser Stelle nicht nochmals erläutert.

Bevor den Kindern das Aufgabenblatt mit den 12 Multiplikationsaufgaben verteilt wurde, wurden sie von der Versuchsleiterin gebeten, die Viererreihe aufzusagen. Dadurch sollte überprüft werden, ob sie multiplizieren können. Danach wurde das Aufgabenblatt verteilt mit der Aufforderung, die Aufgaben möglichst selbständig zu bearbeiten. Die Versuchsleiterin, welche die ganze Zeit anwesend war, fragte jedoch nach, ob die Aufgabenstellungen verstanden wurden. Bei Verständnisschwierigkeiten wurden die Aufgaben erklärt; bei Leseschwierigkeiten wurden sie vorgelesen, wodurch vermieden werden sollte, dass sprachliche Faktoren die Multiplikationsleistungen beeinflussten (siehe Anhang 3).

Die Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht

Für den ersten Teil dieser Untersuchung war es wichtig, dass die Multiplikation und das Multiplikationszeichen im schulischen Unterricht noch nicht explizit behandelt worden waren. Die Einführung der Multiplikation fand bei den einzelnen Lehrpersonen zu verschiedenen Zeitpunkten statt. Einige begannen damit im zweiten Semester, nach den Sportferien, andere bereits nach den Herbstferien und wieder andere zwischen Herbst- und Weihnachtsferien. Alles in allem wurde, gemäss Aussagen der Lehrpersonen, etwa ein halbes Jahr dafür eingeplant. Die Lehrpersonen wurden aufgefordert, sich zu melden, sobald das Kapitel „Multiplikation“ im Rechenbuch fertig eingeführt war. Tabelle 2 zeigt die Anzahl Lektionen und die Zeit zwischen den beiden Untersuchungszeitpunkten in den einzelnen Schulhäusern. Durchschnittlich lagen zwischen dem ersten und zweiten Untersuchungszeitpunkt 126 Tage, wobei oft die Frühlingsferien in diese Zeit fielen. Die Lehrpersonen verwendeten durchschnittlich 52 Lektionen für die Einführung der Multiplikation. Als Lehrmittel wurde das Buch Mathematik 2 (Hohl, Bärtschi & Mühlemann, 2004) verwendet, welches im Kanton Zürich das obligatorische Lehrmittel für den Mathematikunterricht in der zweiten Klasse ist[5]. Zusätzlich wurden, je nach Lehrperson, diverse Übungsmaterialien wie Werkstätten, Bilder, Spiele, Lernlieder oder Zusatzmaterialien aus anderen Lehrmitteln verwendet. Alle Lehrpersonen hatten

[5] siehe www.vsa.ch

langjährige Erfahrungen im Unterrichten auf der Primarstufe und waren bemüht, den Kindern unterschiedliche Aspekte der Multiplikation beizubringen.

Tabelle 2

Angaben der Lehrpersonen über die aufgewendete Zeit für die Einführung der Multiplikation

Schulklasse	**Anzahl Lektionen (ca.)**	**Zeit für die Einführung der Multiplikation**
Schulklasse 1	40	5 Monate 25 Tage
Schulklasse 2	65	4 Monate 13 Tage
Schulklasse 3	48	3 Monate 29 Tage
Schulklasse 4	55	3 Monate 1 Tag
Schulklasse 5	50	3 Monate 23 Tage

3.3 Resultate

Im folgenden Kapitel werden die Resultate der ersten empirischen Untersuchung dargestellt. Diese gliedern sich in drei Teile: Der erste Teil bezieht sich auf die Erhebung vor der Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht, danach folgen die Resultate des zweiten Untersuchungszeitpunktes nach der Einführung der Multiplikation. Zum Schluss werden die Veränderungen der intuitiven Verknüpfungsregeln nach der Einführung der Multiplikation beschrieben.

3.3.1 Vor der Einführung der Multiplikation

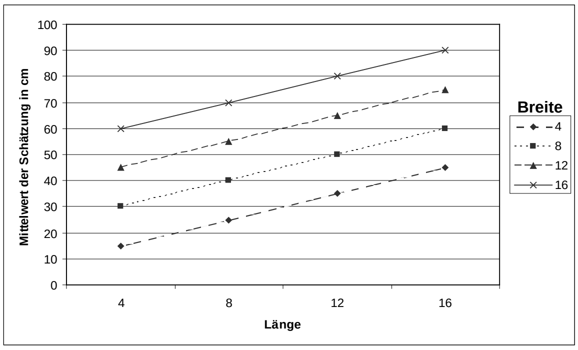
Zuerst werden die Ergebnisse des Experiments zur Schätzung der Rechteckflächen aufgeführt, danach folgen die Auswertungen zu den gelösten Einmaleinsaufgaben. Im letzten Teil werden die algebraischen Verknüpfungsregeln der Kinder mit ihren Leistungen beim Lösen der Einmaleinsaufgaben verglichen.

Intuitive Verknüpfungsregeln

Da für die Untersuchung ein vollständig durchkombiniertes zweifaktorielles within-subject-Design mit Messwiederholung benutzt wurde, konnte für die Analyse des Integrationsprozesses die von Weiss (2006) beschriebene Methode des Funktionalen Messens angewendet werden. Diese Methode ermöglicht die Analyse der intuitiven Verknüpfungsregeln sowohl auf der Gruppen- als auch auf der Individualebene.

Um die Informationsintegration der Faktoren Länge und Breite zu untersuchen, wurden Varianzanalysen gerechnet. Damit eine Verknüpfung der Stimulusdimensionen als multiplikativ eingeteilt wurde, mussten sowohl die Effekte der Länge und Breite als auch deren Interaktion signifikant sein. Zudem war es für die Interpretation der signifikanten Effekte wichtig, dass bei der graphischen Darstellung der durchschnittlichen Schätzwerte ein Fächermuster ersichtlich ist, wenn auf der horizontalen Achse die Länge der Rechtecke dargestellt wird und jede Linie eine Breite zeigt. Das Kriterium einer additiven Verknüpfung waren die Parallelität der Vektoren bei der vorgängig genannten graphischen Darstellung sowie eine Signifikanz der Haupteffekte Länge und Breite. Die Interaktion der Länge und Breite durfte nicht signifikant sein (Anderson, 1996; Weiss, 2006). Abbildung 8 zeigt die graphischen Darstellungen eines typisch additiven und eines typisch multiplikativen Musters.

Aufgrund dieser Analyse wurden die Kinder in drei Gruppen eingeteilt: additive Verknüpfungsregel (Länge + Breite), multiplikative Verknüpfungsregel (Länge x Breite) oder keine Strategie. Diese Einteilung wurde ebenfalls von einem Experten vorgenommen, und die Interraterreliabilität berechnet. Dabei zeigte sich eine hohe Übereinstimmung (Cohen's Kappa = .85).



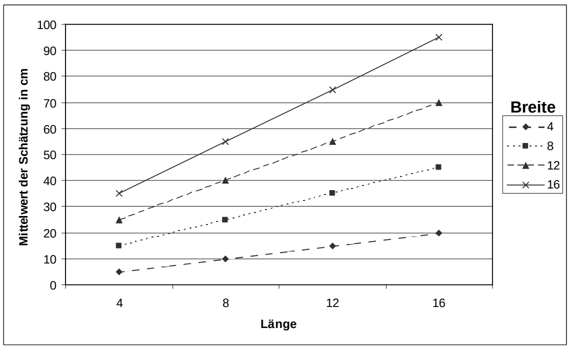


Abbildung 8. Fiktives Beispiel für ein paralleles Muster bei einer additiven Verknüpfungsregel (links) sowie Fächermuster bei einer multiplikativen Verknüpfungsregel (rechts).

Informationsintegration: Gruppenanalysen

Die Integrationsregel der gesamten Altersgruppe wurde mit einer zweifaktoriellen Varianzanalyse (ANOVA) mit Messwiederholung gerechnet, wobei die beiden Faktoren die Länge und Breite (je 4 Stufen) der Rechtecke waren und die abhängige Variable die Urteile der Kinder auf der Antwortskala. Die Haupteffekte für die Länge und die Breite, $F(3, 258) = 576.94$, $p < .001$, $\eta^2 = .870$ bzw. $F(3, 258) = 662.67$, $p < .001$, $\eta^2 = .885$, sowie die Interaktion dieser beiden Faktoren, $F(9, 774) = 7.22$, $p < .001$, $\eta^2 = .077$, waren signifikant. Aus statistischer Sicht würde dies somit auf eine multiplikative Verknüpfung hindeuten. Stellt man das Antwortmuster jedoch graphisch dar (Abbildung 9), indem die Längen der Rechtecke auf der horizontalen Achse dargestellt werden und die unterschiedlichen Breiten die Kurven bilden, so kann nicht eindeutig von einem Fächermuster ausgegangen werden. Über die gesamte Altersgruppe kann somit nur von einer tendenziell multiplikativen Verknüpfungsregel ausgegangen werden.

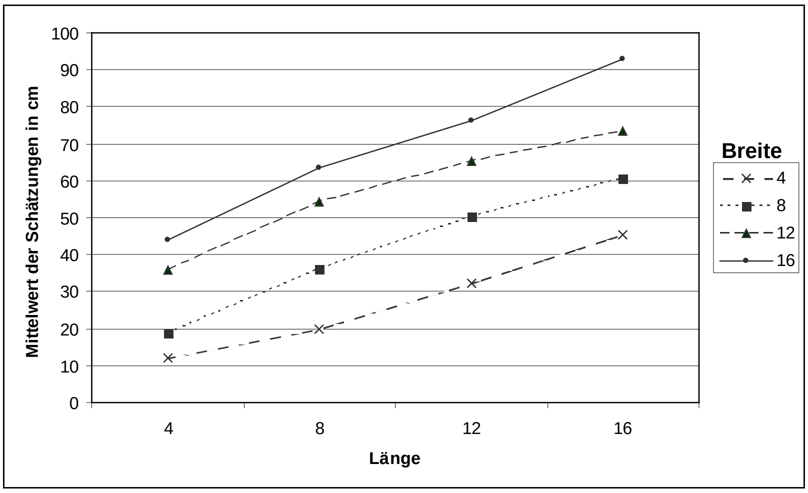


Abbildung 9. Durchschnittliche Schätzwerte der Rechteckflächen für die gesamte Stichprobe vor der Einführung der Multiplikation.

Between-subject-Faktoren. Um zu überprüfen, ob die Präsentation der Rechtecke (es gab zwei unterschiedliche Reihenfolgen) einen Effekt auf die intuitiven Schätzungen der Flächen hatte, wurde erneut eine ANOVA mit Messwiederholung gerechnet, wobei die Between-subject-Faktoren die „Reihenfolge der Rechteckpräsentation“, das „Geschlecht“, die „Schulklasse“ und die „Reihenfolge des Versuchsablaufs“ waren. Sämtliche Between-subject-Faktoren waren nicht signifikant, weder die Reihenfolge der präsentierten Rechtecke, $F(1, 67) = 3.33$, $p = .072$, $\eta^2 = .041$, noch das Geschlecht, $F(1, 67) = 2.43$, $p = .124$, $\eta^2 = .035$, die Schulklasse, $F(4, 67) = 1.08$, $p = .372$, $\eta^2 = .061$, oder die Reihenfolge des Versuchsablaufs, ob zuerst die Einmaleinsaufgaben gelöst wurden oder ob zuerst das Flächenschätzexperiment gemacht wurde, $F(1, 67) = .63$, $p = .432$, $\eta^2 = .009$.

Informationsintegration: Einzelanalysen

Um detailliertere Aussagen über die intuitiven Verknüpfungsregeln der einzelnen Kinder zu machen, wurde für jede Versuchsperson eine separate Varianzanalyse gerechnet. Die Zuteilung der Integrationsregeln erfolgte nach den Kriterien, welche zu Beginn dieses Kapitels beschrieben wurden. Von den 87 Kindern, welche vor der Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht untersucht wurden, konnten 62 Kinder (71.3%) einer additiven (Länge + Breite) und 15 Kinder (17.2%) einer multiplikativen (Länge x Breite) Verknüpfungsregel zugeteilt werden. Bei 10 Kindern (11.5%) konnte keine Regel gefunden werden.

Einmaleinsaufgaben

Alle untersuchten Kinder der zweiten Klasse bearbeiteten die Aufgaben zum kleinen Einmaleins, selbst wenn sie das Multiplikationszeichen noch nicht kannten und somit nicht wussten, wie man damit rechnet. Da sie angehalten wurden, nur diejenigen Aufgaben zu lösen, die sie möchten, wurden teilweise nicht alle Aufgaben bearbeitet. Eine richtig gelöste Aufgabe wurde mit einem Punkt bewertet, insgesamt konnten maximal 10 Punke erreicht werden.

Bei 36 Kindern (41.4%) konnte aufgrund der gelösten Aufgaben keine einheitliche Lösungsstrategie entdeckt werden. Weitere 15 Kinder benutzten falsche, jedoch konstante Lösungsstrategien: Darunter waren sechs Kinder (6.9%), welche die Faktoren als Summanden behandelten (z.B. 2 x 9 = 11), drei Kinder (3.4%), welche die Multiplikationsaufgaben ebenfalls additiv lösten und eins dazu addierten oder subtrahierten (z.B. 2 x 9 = 10 oder 12), vier Kinder (4.6%), welche auf eine der beiden Faktoren zentrierten (z.B. 2 x 9 = 2 oder 9) und zwei Kinder (2.3%), welche zum Lösen der Aufgaben die Subtraktion anwendeten (2 x 9 = 7). Insgesamt konnten 36 Kinder (41.4%) mehr als die Hälfte der Aufgaben richtig lösen. Auf die Frage, warum sie das Multiplikationszeichen bereits kannten, wurden die Eltern oder ältere Geschwister genannt.

Abbildung 10 zeigt die Lösungshäufigkeit der Aufgaben zum kleinen Einmaleins aller Kinder. Die Aufgaben den Reihen Sieben und Acht wurden selten richtig gelöst (9.2%, 9.2%), die Aufgaben aus der Vierer-, Sechser, Dreier- und Neunerreihen etwas häufiger (26.4%, 29.9%, 35.6%, 38%) und die Aufgaben aus der Zweier-, Fünfer-, Zehner- und Einerreihen am meisten (48.3%, 49.4%, 57.7%, 57.7%).

Beziehung zwischen Einmaleinsaufgaben und intuitiven Verknüpfungsregeln

Mit ordinalen und kategorialen Testverfahren wurde geprüft, ob sich signifikante Unterschiede in der Lösungshäufigkeit der Einmaleinsaufgaben zeigten, je nachdem welche intuitive Verknüpfungsregel bei der Aufgabe zur Schätzung der Rechteckflächen benutzt wurde.

Lösungshäufigkeit. Zuerst wurde geprüft, ob die Anzahl gelöster Aufgaben je nach Verknüpfungsregel variierte, z.B. ob Kinder, welche bei der Schätzung der Rechteckflächen eine multiplikative Verknüpfungsregel anwendeten, mehr Einmaleinsaufgaben richtig lösten als Kinder mit einer additiven Integrationsregel. Ein Kruskal-Wallis-Test zeigte diesbezüglich keine signifikanten Unterschiede, $\chi^2(2, N = 87) = 1.22$, $p = .54$, die durchschnittliche Anzahl richtig gelöster Aufgaben war bei beiden intuitiven Regelanwendungsgruppen etwa gleich gross (additive Verknüpfungsregel: $M = 3.3$, $SD = 3.0$, multiplikative Verknüpfungsregel: $M = 4.1$, $SD = 3.4$).

Aufgabenschwierigkeit. Aufgrund der Lösungshäufigkeit wurden die Aufgaben zum kleinen Einmaleins in drei Gruppen eingeteilt. Als „einfach" wurden diejenigen Aufgaben bewertet, welche zwischen 48 und 58% der Kinder richtig lösen konnten (1 x 10, 2 x 1), die „mittelschweren" Aufgaben (3 x 5, 5 x 2, 10 x 9, 6 x 3, 4 x 6, 7 x 4) wurden von 25 bis 38% und die „schwierigen" Aufgaben (9 x 8, 8 x 7) von knapp 10% der Kinder richtig gelöst. Auch bei dieser Einteilung konnte aufgrund der intuitiven Integrationsregel kein signifikanter Unterschied in der Lösungshäufigkeit gefunden werden, [einfache Aufgaben: $\chi^2(2, N = 49) = .58$, $p = .75$, mittelschwere Aufgaben: $\chi^2(2, N = 40) = 1.42$, $p = .50$, schwierige Aufgaben: $\chi^2(2, N = 14) = .66$, $p = .72$].

Lösungshäufigkeit der einzelnen Aufgaben. In Abbildung 10 ist dargestellt, wie sich die Lösungshäufigkeit der Einmaleinsaufgaben auf die intuitiven Verknüpfungsregel-Gruppen verteilt. Um zu prüfen, ob sich diesbezüglich Unterschiede zeigen, wurde für jede Aufgabe ein χ^2-Test gerechnet. Damit es zu keiner Unterbesetzung der Zellen kam, wurden Kinder, welche keiner Regel zugewiesen werden konnten, weggelassen. Somit wurden für die Auswertungen der Aufgaben jeweils nur Kinder mit einer additiven Verknüpfungsregel ($n = 62$) und Kinder mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel ($n = 15$) verglichen. Der Übersicht halber werden die Resultate dieser Tests in der Fussnote aufgeführt. Bei keiner Aufgabe war der Unterschied zwischen den beiden Gruppen signifikant.[6]

[6] $\chi 2$-Test für die Berechnung der Unterschiede zwischen Kindern mit einer additiven Verknüpfungsregel und Kindern mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel in Bezug auf die richtig gelösten Einmaleinsaufgaben.
8 x 7: $\chi 2(1, N = 77) = 1.29$, $p = .13$
9 x 8: $\chi 2(1, N = 77) = 2.04$, $p = .08$
7 x 4: $\chi 2(1, N = 77) = .60$, $p = .34$
4 x 6: $\chi 2(1, N = 77) = .26$, $p = .54$
6 x 3: $\chi 2(1, N = 77) = .07$, $p = .79$
10 x 9: $\chi 2(1, N = 77) = .00$, $p = .98$
5 x 2: $\chi 2(1, N = 77) = .12$, $p = .73$
3 x 5: $\chi 2(1, N = 77) = .85$, $p = .36$

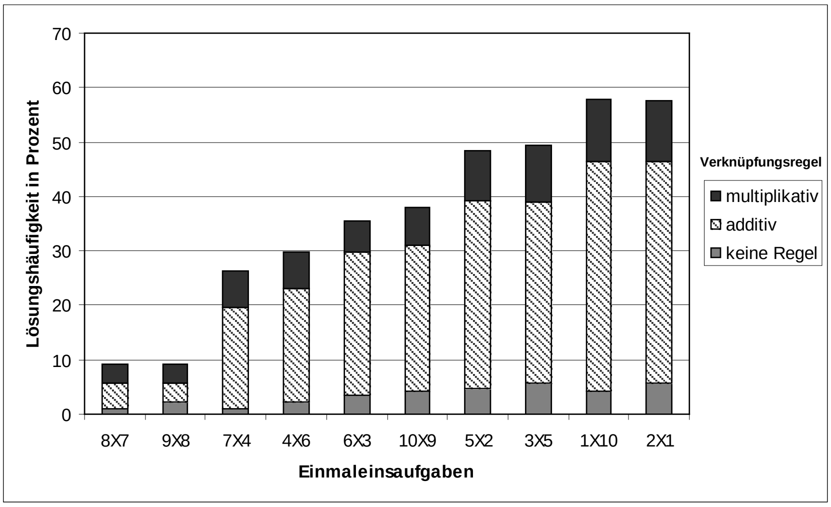


Abbildung 10. Richtig gelöste Aufgaben des kleinen Einmaleins vor der Einführung der Multiplikation, aufgeteilt nach intuitiver Verknüpfungsregel.

Vorkenntnisse der Multiplikation. Aufgrund der Anzahl richtig gelöster Aufgaben wurden die Versuchspersonen in zwei Gruppen eingeteilt: Konnte ein Kind mehr als die Hälfte aller zehn Einmaleinsaufgaben richtig lösen, wurde es der Gruppe „Vorkenntnisse der Multiplikation" zugeteilt. Schülerinnen und Schüler, welche zwischen null und vier Aufgaben richtig bearbeiteten, wurden der Gruppe „keine Vorkenntnisse der Multiplikation" zugeordnet. Somit gab es 36 Versuchspersonen (41.4%) mit Vorkenntnissen und 51 Versuchspersonen (58.6%), welche keine Vorkenntnisse hatten. Ein χ^2-Test zeigte, dass weder die additive noch die multiplikative Verknüpfungsregel in einer der beiden Gruppen häufiger vorkam [$\chi^2(2, N = 87) = .72, p = .70$]. Vorkenntnisse in der Multiplikation hatten somit keinen Einfluss auf die intuitiven Verknüpfungsregeln.

3.3.2 Nach der Einführung der Multiplikation

Im folgenden Kapitel werden zuerst die Resultate zu den intuitiven Verknüpfungsregeln nach der Einführung der Multiplikation dargestellt, danach folgen die Auswertungen zu den gelösten Multiplikationsaufgaben, und im letzten Teil werden die intuitiven Verknüpfungsregeln der Kinder mit ihren Leistungen bei den verschiedenen Multiplikationsaufgaben verglichen.

---

1 x 10: $\chi 2(1, N = 77) = .00, p = .98$
2 x 1: $\chi 2(1, N = 77) = .02, p = .88$

Intuitive Verknüpfungsregeln

Mit einem varianzanalytischen Verfahren (ANOVA mit Messwiederholung) wurde die Informationsintegration der Dimensionen Länge und Breite bei der Schätzung von Rechteckflächen untersucht. Die Faktoren waren wie bei der Auswertung vor der Einführung der Multiplikation die Länge und Breite (je 4 Stufen), die abhängige Variable die Schätzwerte auf der Antwortskala. Die erforderlichen Bedingungen für die Zuteilung zu einer der beiden Verknüpfungsregeln wurden bereits im Kapitel 3.3.1 beschrieben.

Informationsintegration: Gruppenanalyse

Eine ANOVA mit Messwiederholung aller 87 Kinder der zweiten Klasse ergab signifikante Haupteffekte bei der Länge und der Breite, $F(3, 258) = 977.13$, $p < .001$, $\eta^2 = .919$ bzw. $F(3, 258) = 1112.08$, $p < .001$, $\eta^2 = .928$. Da die Interaktion der Länge und Breite ebenfalls hoch signifikant war, $F(9, 774) = 24.45$, $p < .001$, $\eta^2 = .221$, und die dazugehörige Graphik ein Fächermuster zeigte (Abbildung 11), kann insgesamt von einem multiplikativen Muster ausgegangen werden.

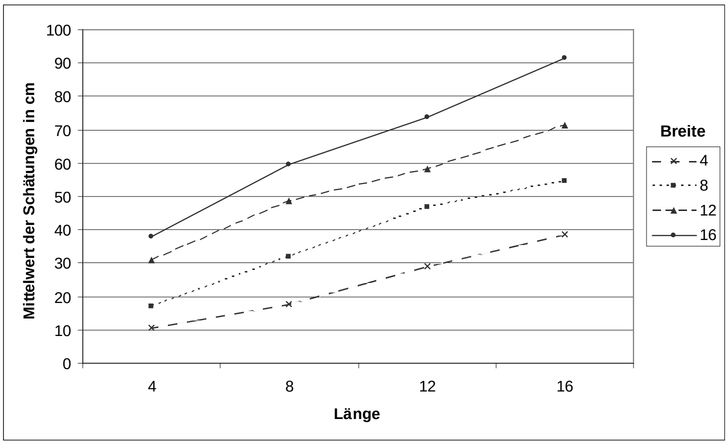


Abbildung 11. Durchschnittliche Schätzwerte der Rechteckflächen für die gesamte Stichprobe nach der Einführung der Multiplikation.

Between-subject-Faktoren. Eine weitere ANOVA wurde zur Überprüfung der Between-subject-Faktoren gerechnet. Keiner dieser Faktoren zeigte einen signifikanten Effekt, „Reihenfolge der präsentierten Rechtecke“, $F(1, 53) = 2.84$, $p = .13$, $\eta^2 = .043$, „Geschlecht“, $F(1, 53) = .64$, $p = .43$, $\eta^2 = .012$, „Schulklasse“, $F(4, 53) = .55$, $p = .71$, $\eta^2 = .04$, und auch die „Reihenfolge des Versuchsablaufs“, ob zuerst die Rechtecke geschätzt oder zuerst das Mathematikblatt gelöst wurde, ergab keinen signifikanten Effekt, $F(1, 53) = 1.42$, $p = .24$, $\eta^2 = .026$.

Informationsintegration: Einzelanalysen

Um die intuitiven Verknüpfungsregeln der einzelnen Kinder zu ermitteln, wurde für jede Versuchsperson eine ANOVA gerechnet. Die Zuteilung der Integrationsregeln erfolgte nach den Kriterien, welche im Kapitel 3.3.1 beschrieben wurden. Nach der Einführung der Multiplikation wurden somit 61 Kinder (70.1%) einer additiven und 25 Kinder (28.8%) einer multiplikativen Verknüpfungsregel zugeteilt. Bei einem Kind (1.1%) konnte keine algebraische Regel gefunden werden. Die Zuteilung zu den intuitiven Verknüpfungsregeln wurden mit derjenigen eines Experten verglichen und die Interraterreliabilität wurde berechnet, (Cohen's Kappa = .87).

Gelöste Multiplikationsaufgaben nach der Einführung der Multiplikation

Die gelösten Multiplikationsaufgaben wurden korrigiert, und jedes richtige Resultat wurde mit einem Punkt bewertet. Somit ergaben sich pro Aufgabentyp maximal zwei Punkte. Bei den Aufgaben, bei denen Malaufgaben gefunden werden mussten, gab es einen halben Punkt pro richtig gefundene Aufgabe, insgesamt ebenfalls zwei Punkte. Mit zwei Kindern konnten die Mathematikaufgaben aus Konzentrations- bzw. Zeitgründen nicht gelöst werden. Daher beziehen sich die Auswertungen zu den gelösten Multiplikationsaufgaben jeweils auf 85 Versuchspersonen. Das auswendige Aufsagen der Viererreihe gelang 59 Kindern (69.4%), 20 Kinder (23.5%) zählten die Zahlen einzeln auf und betonten dabei jede vierte Zahl und 6 Kinder (7.1%) benutzten die Finger zur Hilfestellung.

Tabelle 3 zeigt die Häufigkeit der gelösten Aufgaben. Das richtige Lösen beider Aufgaben zum Pfeilwerfen (zeitlich-sukzessiv mit bildhafter Darstellung) gelang den Kindern am wenigsten gut (32.9%). Es fällt auf, dass bei beiden Aufgabentypen, die bildhaft dargestellt wurden (zeitlich-sukzessiv sowie räumlich-simultan), insgesamt am seltensten alle zwei Aufgaben richtig gelöst wurden (32.9%, 38.8%). Das richtige Lösen beider Satzaufgaben (zeitlich-sukzessiv und räumlich-simultan mit symbolischer Darstellung) schien für die Kinder am einfachsten gewesen zu sein (69.4%, 57.6%). Ein Wilcoxon-Test für abhängige Stichproben zeigte, dass das Kriterium der bildhaften Darstellung einen signifikanten Unterschied in der Lösungshäufigkeit ausmachte [räumlich-simultan mit/ohne bildhafte

Darstellung: $Z(85) = -3.82$, $p < .001$ bzw. zeitlich-sukzessiv mit/ohne bildhafte Darstellung: $Z(85) = - 4.44$, $p <. 001$]. Bildhaft dargestellte Aufgaben waren für die Kinder somit schwieriger zu lösen als symbolisch dargestellte. Die Aufgaben zum Korrespondenzschema wurden etwas häufiger richtig gelöst als diejenigen mit bildhafter Darstellung, jedoch nicht so oft wie die Satzaufgaben. Die beiden Aufgabentypen räumlich-simultan und zeitlich-sukzessiv unterschieden sich in Bezug auf die Lösungshäufigkeit nicht voneinander, $Z(85) = -1.38$, $p = .17$, auch nicht, wenn sie nach Darstellungsart aufgeteilt wurden, [bildhafte Darstellung: räumlich-simultan/zeitlich-sukzessiv $Z(85) = -.10$, $p = .92$, symbolische Darstellung: räumlich-simultan/zeitlich-sukzessiv, $Z(85) = -1.73$, $p = .09$].

Tabelle 3

Häufigkeit der gelösten Multiplikationsaufgaben in Anzahl Versuchspersonen und in gerundeten Prozenten (Klammer)

	Anzahl richtige Aufgaben		
Aufgabentyp	**0**	**1**	**2**
Korrespondenzschema	18 (21)	27 (32)	40 (47)
zeitlich-sukzessiv, bildhafte Darstellung	26 (31)	31 (36)	28 (33)
zeitlich-sukzessiv, symbolische Darstellung	13 (15)	13 (15)	59 (70)
räumlich-simultan, bildhafte Darstellung	32 (38)	20 (23)	33 (39)
räumlich-simultan, symbolische Darstellung	14 (16)	22 (26)	49 (58)

	Anzahl richtige Aufgaben				
Aufgabentyp	**0**	**½**	**1**	**1 ½**	**2**
Malaufgaben finden [a]	3 (3)	10 (12)	18 (21)	21 (25)	33 (39)

Anmerkung. Da die Aufgaben von zwei Kindern nicht gelöst wurden, bezieht sich die Auswertung auf 85 Versuchspersonen.

[a] Beim Aufgabentyp „Malaufgaben finden" wurde jede richtig gefundene Aufgabe mit einem halben Punkt bewertet.

Beziehung zwischen den Multiplikationsaufgaben und intuitiven Verknüpfungsregeln

Für die folgenden Auswertungen wurde jeweils die Gruppe der Kinder mit einer additiven Verknüpfungsregel ($n = 59$) mit derjenigen mit einer multiplikativen Regel ($n = 25$) verglichen, die Stichprobe besteht daher jeweils aus 84 Kindern. Zur Überprüfung der Unterschiede in der Lösungshäufigkeit, der Aufgabentypen sowie in der Lösungsstrategie wurden Mann-Whitney-U-Tests für unabhängige Stichproben sowie χ^2-Tests gerechnet.

Durchschnittliche Lösungshäufigkeit. Durchschnittlich wurden 7,7 von 12 möglichen Punkten erreicht (*SD* = 3.13). Aufgeteilt nach intuitiver Verknüpfungsregel zeigte sich, dass Kinder, welche aufgrund der Rechteckflächenschätzung einer multiplikativen Verknüpfungsregel zugeteilt wurden, mehr Aufgaben richtig lösten als Kinder mit einer additiven Verknüpfungsregel (additive Verknüpfungsregel: *M* = 7.0, *SD* = 3.0, multiplikative Verknüpfungsregel: *M* = 9.3, *SD* = 2.8). Ein Mann-Whitney-U-Test belegte, dass der Unterschied zwischen diesen beiden Gruppen signifikant ist, $Z(84) = -3.34$, $p < .001$.

Lösungshäufigkeit der einzelnen Aufgabentypen. Beim Zählen in Viererschritten zeigten sich keine signifikanten Unterschiede in Bezug auf die intuitiven Verknüpfungsregeln, $\chi^2(4, N = 85) = 8.26$, $p = .08$. Es gab Kinder, welche intuitiv die Länge und Breite miteinander multiplizierten, jedoch die Viererreihe nur mit Hilfe ihrer Finger aufsagen konnten, und das Kind, welches keiner Regel zugeteilt werden konnte, zählte die Reihe auswendig auf.

In dieser ersten empirischen Untersuchung ging es unter anderem darum, ob sich aufgrund einer additiven oder multiplikativen Verknüpfungsregel Unterschiede in der Lösungshäufigkeit einzelner Aufgabentypen zeigen. Daher wurde in einem ersten Schritt mit Mann-Whitney-U-Tests die Verteilung der Lösungshäufigkeit *zwischen* den Verknüpfungsregel-Gruppen verglichen. Weiter wurde mit χ^2-Tests überprüft, ob *innerhalb* der Regelanwendungsgruppen signifikant häufiger keine, eine oder beide Aufgaben gelöst wurden. Unterschiede in der Lösungshäufigkeit der einzelnen Aufgabentypen zwischen der Gruppe mit einer additiven Verknüpfungsregel und derjenigen mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel würden sich statistisch somit unter folgenden Bedingungen zeigen: Es müssten signifikante Unterschiede in der Lösungshäufigkeit *zwischen* den Gruppen vorhanden sein und zusätzlich müssten sich *innerhalb* der Regelanwendungsgruppen unterschiedliche Verteilungen der Lösungshäufigkeit zeigen. Die Häufigkeit der gelösten Aufgaben sowie die Signifikanzwerte innerhalb und zwischen den Regelgruppen sind in Tabelle 4 dargestellt.

Bei den Aufgaben zum Korrespondenzschema wurde ein hoch signifikanter Unterschied zwischen den Regelgruppen entdeckt, $Z(84) = -3.27$, $p < .001$. In Abbildung 12 ist zu sehen, dass sich auch innerhalb der beiden Gruppen Unterschiede zeigten: Die Gruppe mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel löste signifikant am häufigsten (72%) beide Aufgaben richtig, $\chi^2(2, N = 25) = 18.32$, $p < .001$, nur selten (4%) konnte keine Aufgabe richtig gelöst werden. Innerhalb der Gruppe mit einer additiven Verknüpfungsregel war die Lösungshäufigkeit von keiner, einer oder beiden Aufgaben etwa ausgeglichen und daher nicht signifikant, $\chi^2(2, N = 59) = .54$, $p = .76$. Das gleiche Bild konnte auch bei den einzelnen Aufgaben dieses Aufgabentyps gefunden werden. Diese Resultate zeigen somit, dass Kinder mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel, im Unterschied zu Kindern mit einer additiven Verknüpfungsregel, signifikant häufiger beide Aufgaben zum Korrespondenzschema richtig lösten.

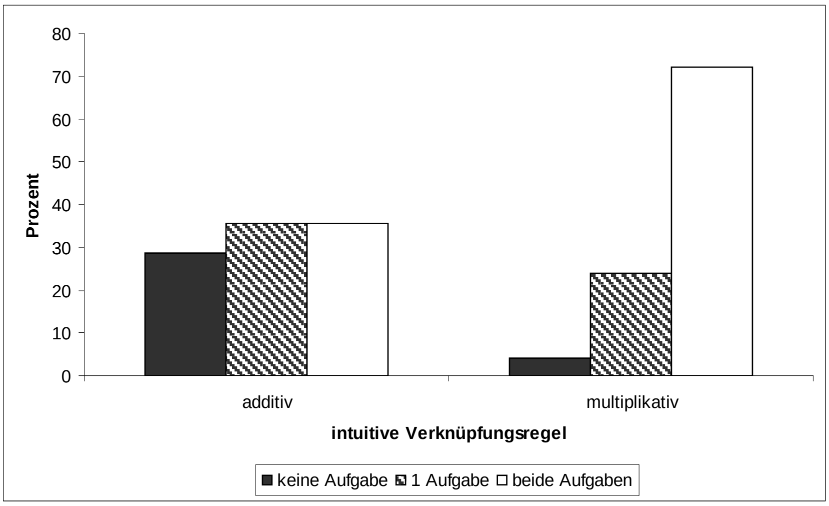


Abbildung 12. Prozentualer Anteil richtig gelöster Aufgaben beim Aufgabentyp „Korrespondenzschema“, aufgeteilt nach intuitiver Verknüpfungsregel.

Die Aufgaben des Typs „zeitlich-sukzessiv mit bildhafter Darstellung“ waren insgesamt am schwierigsten; nur 28 Kinder aus der gesamten Stichprobe konnten beide Aufgaben richtig lösen. Zwischen den Regelgruppen zeigte sich ein signifikanter Unterschied in der Verteilung der Lösungshäufigkeit, $Z(84) = -2.74$, $p < .01$. Innerhalb der Gruppe mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel ergab sich ebenfalls ein signifikanter Unterschied, es wurden am häufigsten (56%) beide Aufgaben richtig gelöst, $\chi^2(2, N = 25) = 6.32$, $p < .05$. In der Gruppe mit der additiven Verknüpfungsregel war dies nicht der Fall, $\chi^2(2, N = 59) = 2.68$, $p = .26$, nur 23.7% lösten beide Aufgaben richtig, während 35.6% keine dieser Aufgaben richtig bearbeiten konnten und 40.7% eine richtig lösten. Auch bei diesem

Aufgabentyp lösten die Kinder mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel somit signifikant häufiger beide Aufgaben richtig als Kinder mit einer additiven Verknüpfungsregel. In Abbildung 13 ist dieser Unterschied graphisch dargestellt.

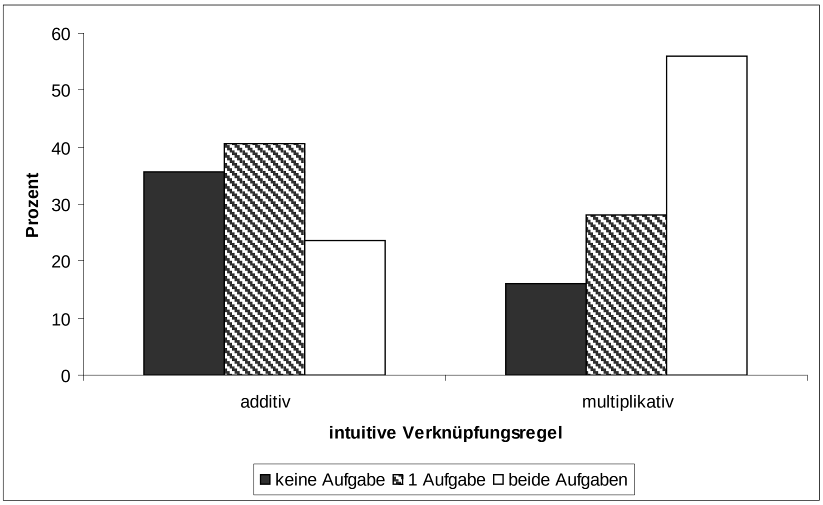


Abbildung 13. Prozentualer Anteil richtig gelöster Aufgaben beim Aufgabentyp "zeitlich-sukzessiv mit bildhafter Darstellung", aufgeteilt nach intuitiver Verknüpfungsregel.

Der Aufgabentyp „zeitlich-sukzessiv mit symbolischer Darstellung“ war für die Versuchspersonen eher einfach zu lösen: 80% der Kinder mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel und 66% der Kinder mit einer additiven Verknüpfungsregel lösten beide Aufgaben richtig. Innerhalb dieser Regelgruppen wurden beide Aufgaben signifikant am häufigsten richtig gelöst, [additive Regel: $\chi^2(2, N = 59) = 28.92$, $p < .001$, multiplikative Regel: $\chi^2(2, N = 25) = 25.04$, $p < .001$]. Da die Verteilung innerhalb der beiden Gruppen ähnlich war, zeigte sich kein signifikanter Unterschied zwischen Kindern mit einer additiven Verknüpfungsregel und denjenigen mit einer multiplikativen Regel, $Z(84) = -1.49$, $p = .14$.

Auch beim Aufgabentyp „räumlich-simultan mit bildhafter Darstellung“ zeigte sich in Bezug auf die Lösungshäufigkeit ein signifikanter Unterschied zwischen den Regelgruppen, $Z(84) = -2.01$, $p < .05$. Kinder mit einem multiplikativen Muster lösten beide Aufgaben häufiger richtig als diejenigen mit einem additiven Muster. Innerhalb der Gruppen zeigten sich jedoch keine signifikanten Unterschiede in der Lösungshäufigkeit der beiden Aufgaben, [additive Regel: $\chi^2(2, N = 59) = 4.31$, $p = .12$, multiplikative Regel $\chi^2(2,$

N = 25) = 4.16, p = .13]. Somit konnte bei diesem Aufgabentyp zwischen den beiden Regelgruppen kein Unterschied in der Lösungshäufigkeit gefunden werden.

Die räumlich-simultanen Aufgaben mit symbolischer Darstellung wurden von beiden Regelgruppen signifikant am häufigsten richtig gelöst, von den Kindern mit der additiven Verknüpfungsregel etwas weniger häufig als von denjenigen mit einer multiplikativen Regel [additive Regel: $\chi^2(2, N = 59) = 9.19$, $p < .01$, multiplikative Regel: $\chi^2(2, N = 25) = 24.56$, $p < .001$]. Zwischen den Regelgruppen ergab sich daher kein signifikanter Unterschied in der Verteilung der Lösungshäufigkeit, $Z(84) = -2.30$, $p < .05$. Insgesamt scheint dieser Aufgabentyp für beide Regelgruppen einfach zu lösen gewesen zu sein.

Bei den Aufgaben, bei welchen Malaufgaben gefunden werden mussten, zeigten sich signifikante Unterschiede in Bezug auf die Lösungshäufigkeit innerhalb der Regelanwendungsgruppen; beide Aufgaben wurden in beiden Gruppen am häufigsten richtig gelöst, [additive Regel: $\chi 2(2, N = 59) = 22.10$, $p < .001$, multiplikative Regel: $\chi 2(2, N = 25) = 10.00$, $p < .05$]. Daher zeigte sich zwischen den Gruppen kein signifikanter Unterschied, $Z(84) = -1.49$, $p = .14$. Diese Aufgaben wurden sowohl von Kindern mit einer additiven Verknüpfungsregel als auch von Kindern mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel meistens richtig gelöst.

Unterschiede bezüglich der intuitiven Verknüpfungsregel bei der Schätzung der Rechteckflächen zeigten sich somit bei den gelösten Aufgaben zum Korrespondenzschema sowie den zeitlich-sukzessiven Aufgaben mit bildhafter Darstellung. Kinder mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel lösten die Aufgaben beider Aufgabentypen häufiger richtig als Kinder mit einer additiven Verknüpfungsregel.

Tabelle 4

Häufigkeit der gelösten Multiplikationsaufgaben in Anzahl Versuchspersonen und in gerundeten Prozenten (Klammer), aufgeteilt nach Kindern mit einer additiven und Kindern mit einer multiplikativen Verknüpfungs-regel

	additive Verknüpfungsregel				**multiplikative Verknüpfungsregel**		
	Anzahl richtige Aufgaben				**Anzahl richtige Aufgaben**		
Aufgabentyp	**0**	**1**	**2**		**0**	**1**	**2**
Korrespondenzschema	17(30)	21(35) n.s. [b]	21(35)	*** [a]	1(4)	6(24) *** [b]	18(72)
zeitlich-sukzessiv, bildhafte Darstellung	21(35)	24(41) n.s. [b]	14(24)	** [a]	4(16)	7(28) * [b]	14(56)
zeitlich-sukzessiv, symbolische Darstellung	12(20)	8(14) *** [b]	39(66)	n.s. [a]	1(4)	4(16) *** [b]	20(80)
räumlich-simultan, bildhafte Darstellung	26(44)	13(22) n.s. [b]	20(34)	* [a]	5(20)	7(28) n.s [b]	13(52)
räumlich-simultan, symbolische Darstellung	10(17)	20(34) ** [b]	29(49)	* [a]	3(12)	2(8) *** [b]	20(80)

	Anzahl richtige Aufgaben						**Anzahl richtige Aufgaben**				
Aufgabentyp	**0**	**½**	**1**	**1 ½**	**2**		**0**	**½**	**1**	**1 ½**	**2**
Malaufgaben finden	2 (3)	8 (14)	13 (22) *** [b]	12 (20)	24 (41)	n.s.[a]	1 (4)	2 (8)	5 (20) * [b]	8 (32)	9 (36)

Anmerkung. Beim Aufgabentyp „Malaufgaben finden“ wurde jede richtig gefundene Aufgabe mit einem halben Punkt bewertet.

[a] Unterscheidung zwischen der additiven und der multiplikativen Verknüpfungsregel-Gruppe, Signifikanzwerte des Mann-Whitney-U-Tests.

[b] Unterscheidung innerhalb der Verknüpfungsregel-Gruppe, Signifikanzwerte des $\chi 2$-Tests.

**** = $p < .001$, ** = $p < .01$, * = $p < .05$*

Lösungsstrategien. Wie vorgängig erwähnt, gelang das richtige Lösen der Aufgaben zum Punktefeld (räumlich-simultan mit bildhafter Darstellung) den Kindern mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel zwar besser als der Gruppe mit einer additiven Regel, der Unterschied war jedoch nicht signifikant. Bei diesen Aufgaben wurden die Kinder zusätzlich zur Lösung gefragt, wie sie am schnellsten die Anzahl Punkte des Punktefeldes herausfinden würden. Dabei wurde beobachtet, ob sie die Anzahl Punkte der Länge und der Breite zählten und dann miteinander multiplizierten (multiplikative Strategie) oder ob sie die Punktereihen zählten und diese addierten (wiederholte Addition). Um einer dieser beiden Lösungsstrategien zugeteilt zu werden, mussten beide Aufgaben auf dieselbe Art gelöst werden. Wurden beide Aufgaben mit unterschiedlichen Strategien gelöst, galt dies als indifferente Strategie.

In der Verwendung der Lösungsstrategien bei den Aufgaben zum Punktefeld zeigte sich ein signifikanter Unterschied zwischen den Regelgruppen, $\chi^2(2, N = 85) = 7.90$, $p < .05$. Von den 25 Kindern mit der multiplikativen Strategie lösten 18 (72%) die Aufgabe multiplikativ und nur 1 Kind (4%) mit der wiederholten Addition. Es zeigte sich somit, dass die multiplikative Strategie zur Lösung der Aufgabe von den Kindern mit einem multiplikativen Muster am häufigsten verwendet wurde, $\chi^2(2, N = 25) = 18.32$, $p < .001$. Von den Kindern mit einer additiven Verknüpfungsregel lösten 25 Kinder (41.7%) die Aufgabe multiplikativ und 12 Kinder (20%) mit der additiven Strategie. Innerhalb dieser Gruppe waren die Unterschiede in der Lösungsstrategie nicht signifikant, $\chi^2(2, N = 59) = 4.90$, $p = .09$. Abbildung 14 zeigt die prozentualen Anteile der angewendeten Lösungsstrategien. Verglichen mit den intuitiven Verknüpfungsregeln zeigte sich somit, dass die Kinder mit einem multiplikativen Muster diese Aufgabe signifikant häufiger mit der multiplikativen Strategie lösten (Punkte der Länge und Breite zählen und dann miteinander multiplizieren) als Kinder mit einem additiven Muster.

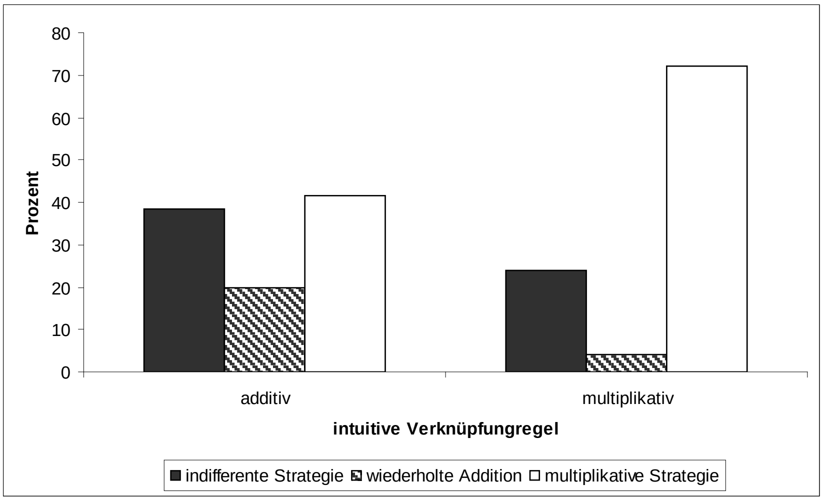


Abbildung 14. Prozentualer Anteil an unterschiedlichen Lösungsstrategien beim Aufgabentyp „räumlich-simultan mit bildhafter Darstellung", aufgeteilt nach intuitiver Verknüpfungsregel.

3.3.3 Veränderung der intuitiven Verknüpfungsregeln durch das Erlernen der numerischen Multiplikation im schulischen Unterricht

Konsistenzanalyse

Beim Experiment zur Schätzung der Rechteckflächen wurde den Kindern jedes Rechteck zweimal präsentiert (Messwiederholung). Sie gaben somit für jedes Rechteck zweimal ein Urteil ab, ihre Antwortmuster wurden aufgrund des Mittelwerts aus den beiden Schätzungen berechnet. Mit einer Konsistenzanalyse wurde geprüft, wie ähnlich sich diese beiden Schätzungen waren. Es wurde erwartet, dass die Messwiederholungsdaten in einem engen linearen Zusammenhang stehen. Würde die Pearson-Korrelation einen niedrigen Wert zeigen, wären die Daten nur bedingt interpretierbar, da dies bedeuten würde, dass die Mittelwerte aus zwei Schätzungen entstanden, welche sich nicht ähnlich waren. In Tabelle 5 sind die Korrelationskoeffizienten nach Pearson für sämtliche Rechteckschätzungen aufgeführt. Neben dem Zusammenhang der Messwiederholungsdaten wurde zusätzlich verglichen, ob die Mittelwerte der Schätzungen vor und nach der Einführung der Multiplikation ähnlich waren.

Tabelle 5

Pearson Korrelationen und Signifikanzwerte (in Klammer) der Messwiederholungsdaten vor und nach der Einführung der Multiplikation sowie der Vergleich der beiden Mittelwerte

	Korrelation der beiden Schätzwerte pro Rechteck (*N* = 87)		
Rechteckgrösse	**vor der Einführung der Multiplikation**	**nach der Einführung der Multiplikation**	**vor und nach der Einführung**
4 x 4	.46 (***)	.41 (***)	.36 (***)
4 x 8	.34 (***)	.51 (***)	.18 (-)
4 x12	.55 (***)	.47 (***)	.37 (***)
4 x 16	.54 (***)	.56 (***)	.36 (***)
8 x 4	.47 (***)	.58 (***)	.31 (**)
8 x 8	.21 (-)	.39 (***)	.28 (**)
8 x 12	-.01 (-)	.53 (***)	.34 (***)
8 x 16	.29 (**)	.37 (***)	.47 (***)
12 x 4	.30 (**)	.36 (***)	.25 (*)
12 x 8	.43 (***)	.38 (***)	.39 (***)
12 x 12	.14 (-)	.34 (***)	.37 (***)
12 x 16	.25 (*)	.35 (***)	.18 (-)
16 x 4	.27 (*)	.6 (***)	.3 (**)
16 x 8	.36 (***)	.52 (***)	.39 (***)
16 x 12	.46 (***)	.51 (***)	.31 (**)
16 x 16	.74 (***)	.79 (***)	.21 (*)
Total	.36 (***)	.48 (***)	.32 (**)

Anmerkung: * = $p < .05$, ** = $p < .01$, *** = $p < .001$

Es zeigte sich, dass die beiden Schätzwerte mehrheitlich signifikant miteinander korrelierten. Bei den Schätzungen nach der Einführung der Multiplikation war der Korrelationskoeffizient höher als bei den Schätzungen vor der Einführung der Multiplikation. Auch zwischen den Mittelwerten vor und denjenigen nach der Einführung der Multiplikation zeigte sich ein signifikanter Zusammenhang.

Verteilung der intuitiven Verknüpfungsregeln zu beiden Untersuchungszeitpunkten

Um der Frage nachzugehen, ob sich die intuitiven Verknüpfungsregeln der Kinder durch die Einführung der Multiplikation in der Schule verändern, wurden die Verteilungen der zugeteilten intuitiven Regeln aus den beiden Untersuchungszeitpunkten miteinander verglichen. Abbildung 15 zeigt die Verteilung der Verknüpfungsregeln zu beiden Zeitpunkten.

Mit dem χ^2-Test wurde die beobachtete Verteilung der ersten Erhebung mit der Verteilung der intuitiven Verknüpfungsregeln aus der Untersuchung nach der Einführung der Multiplikation verglichen. Dabei zeigte sich, dass sich diese beiden Verteilungen signifikant voneinander unterscheiden, $\chi^2(2, N = 87) = 14.78, p < .001$. Während die prozentuale Häufigkeit der additiven Verknüpfungsregeln zu beiden Untersuchungszeitpunkten etwa gleich blieb (71.3% / 70.1%), gab es eine Zunahme der multiplikativen Integrationsregel (17.2% / 28.7%) zum zweiten Untersuchungszeitpunkt, während die prozentuale Häufigkeit der Kinder, bei denen keine Regel gefunden werden konnte, abnahm (11.5% / 1.1%).

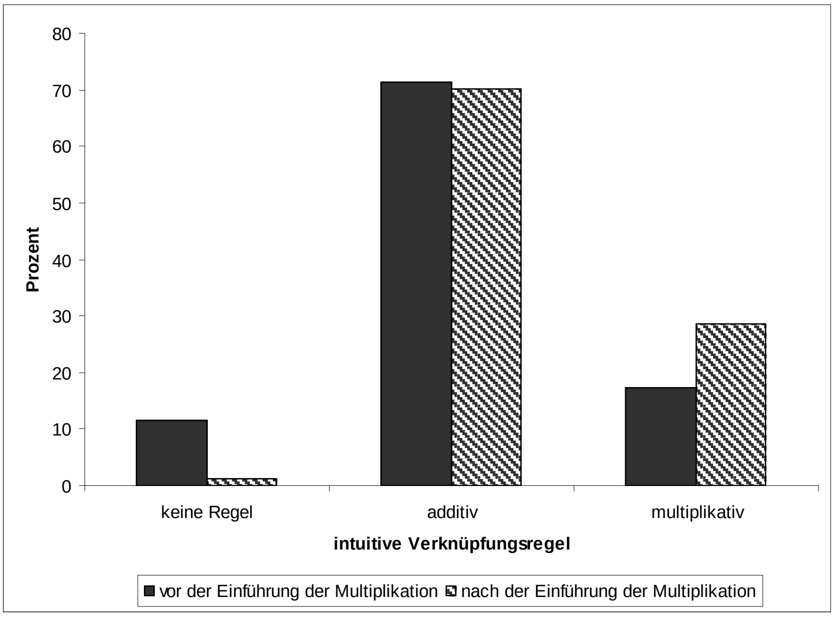


Abbildung 15. Verteilung der intuitiven Verknüpfungsregeln vor und nach der Einführung der Multiplikation.

Die Stärke des Zusammenhangs der intuitiven Verknüpfungsregeln vor und nach der Einführung der Multiplikation wurde mit dem Korrelationskoeffizienten nach Kendall tau-b berechnet, welcher einen schwachen und nicht signifikanten Zusammenhang zeigte (Kendall's tau-b = .196, p =.059). Zur genaueren Analyse dieses Resultats wurden die Regeländerungen der einzelnen Kinder angeschaut.

Regeländerungen der einzelnen Kinder

Tabelle 6 zeigt, wie sich die intuitiven Regeln der Kinder nach der Einführung der Multiplikation veränderten. Es ist ersichtlich, dass die Veränderungen grösser waren, als es auf den ersten Blick über die gesamte Altersgruppe schien. Die Regeln wurden nicht nur in Richtung der normativen, multiplikativen Regel verbessert, sondern es gab auch Regelverschlechterungen.

Bei 8 Kindern (9.2%) zeigte sich eine Verschlechterung von der intuitiven multiplikativen Verknüpfungsregel zur additiven Regel; sie benutzten somit bei der zweiten Untersuchung eine einfachere algebraische Regel als bei der ersten Schätzung der Rechteckflächen. Weitere 54 Kinder (62.1%) behielten zu beiden Untersuchungszeitpunkten dieselbe Verknüpfungsregel, entweder konnten sie beide Male keiner Regel zugeteilt werden oder benutzten die additive oder die multiplikative Regel. Von den 62 Kindern mit der additiven Verknüpfungsregel benutzten nur 16 Kinder (18.4%) nach der Einführung der Multiplikation die multiplikative Integrationsregel. Kein einziges Kind aus dieser Gruppe verschlechterte seine intuitive Verknüpfungsregel.

Tabelle 6

Änderung der intuitiven Verknüpfungsregel nach der Einführung der Multiplikation in der Schule in Anzahl Versuchspersonen und in gerundeten Prozenten der gesamten Stichprobe (Klammer)

	intuitive Verknüpfungsregel nach der Einführung der Multiplikation		
intuitive Verknüpfungsregel vor der Einführung der Multiplikation	keine (n = 1)	additiv (n = 61)	multiplikativ (n = 25)
keine (n = 10)	1 (1)	7 (8)	2 (2)
additiv (n = 62)	-	46 (53)	16 (19)
multiplikativ (n = 15)	-	8 (9)	7 (8)
Total (N = 87)	1 (1)	61 (70)	25 (29)

Zusammenhang der Regeländerung mit Vorkenntnissen der Multiplikation

Vor der Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht wurde den Kindern ein Arbeitsblatt mit Einmaleinsaufgaben zum Lösen gegeben. Aufgrund ihrer Leistungen bei diesen Aufgaben wurden sie in zwei Gruppen eingeteilt: Kinder, welche mehr als die Hälfte der Aufgaben richtig lösten, wurden in die Gruppe „Vorkenntnisse der Multiplikation“

eingeteilt, die restlichen Kinder wurden der Gruppe „keine Vorkenntnisse der Multiplikation“ zugeteilt. Die Änderungen der intuitiven Verknüpfungsregeln wurden in vier Gruppen eingeteilt: Verschlechterung der intuitiven Regel von multiplikativ zu additiv, stabil additiv oder multiplikativ zu beiden Untersuchungszeitpunkten und Verbesserung der intuitiven Regel von additiv zu multiplikativ. Kinder, welche keiner intuitiven Regel zugeteilt werden konnten, wurden für die folgende Auswertung weggelassen. Es zeigte sich, dass in der Gruppe, welche zu beiden Untersuchungszeitpunkten eine additive Verknüpfungsregel anwendete (n = 46), und in der Gruppe, welche ihre Regel von einer multiplikativen Integration zu einer additiven Regel verschlechterte (n = 8), prozentual mehr Kinder waren, welche zu Beginn der Untersuchung keine Vorkenntnisse der Multiplikation hatten. In der Gruppe, welche ihre Verknüpfungsregel von additiv zu multiplikativ verbesserte (n = 16) oder gleich multiplikativ blieb (n = 7), hatten prozentual mehr Kinder Vorkenntnisse bezüglich der Multiplikation. In Abbildung 16 sind diese Tendenzen graphisch dargestellt. Ein Binominaltest zeigte, dass sich in der Gruppe mit der stabilen Additionsregel signifikant (p < .05) mehr Kinder ohne Vorkenntnisse der Multiplikation befanden. Aufgrund der kleinen Stichproben wurde dieser Test bei den anderen Regeländerungsgruppen nicht signifikant (Verschlechterung multiplikativ zu additiv: p = .29, Verbesserung additiv zu multiplikativ p = .45, gleich multiplikativ: p = .21).

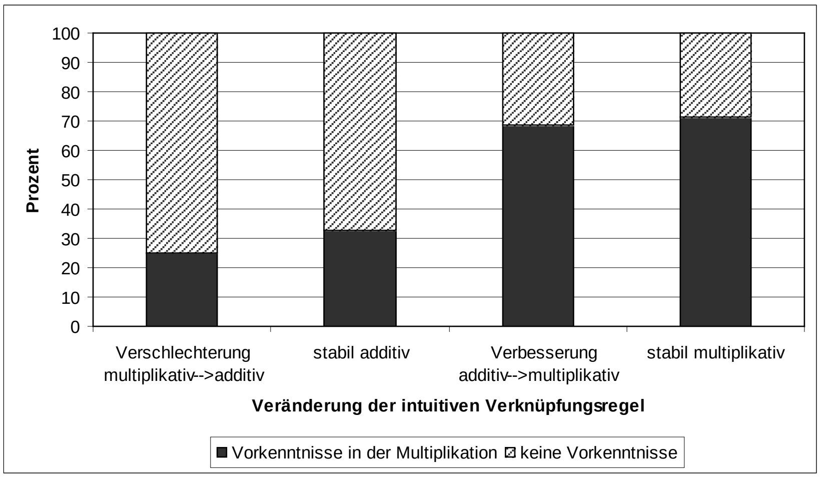


Abbildung 16. Prozentualer Anteil Kinder mit Vorkenntnissen der Multiplikation innerhalb der Regeländerungsgruppen.

Beziehung zwischen der Regeländerung und den gelösten Multiplikationsaufgaben

In diesem Kapitel geht es darum, welche Beziehung zwischen den numerischen Fähigkeiten, welche nach der Einführung der Multiplikation durch das Lösen von Multiplikationsaufgaben gemessen wurden, und der Veränderung der intuitiven Integrationsregeln durch die Einführung der Multiplikation besteht.

In einem ersten Schritt wurde verglichen, ob sich die unterschiedlichen Regeländerungsgruppen in Bezug auf die Anzahl richtig gelöster Multiplikationsaufgaben unterscheiden. Kinder, welche keiner Regel zugeteilt werden konnten, wurden für die folgenden Berechnungen weggelassen, die Stichprobe besteht daher aus 76 Kindern. Ein Kruskal-Wallis-Test für unabhängige Stichproben zeigte einen signifikanten Unterschied zwischen den Regeländerungsgruppen und der durchschnittlichen Anzahl richtig gelöster Aufgaben, $\chi^2(3, N = 76) = 13.12$, $p < .01$. In Abbildung 17 ist dies graphisch dargestellt. Kinder mit einer stabilen multiplikativen Verknüpfungsregel in beiden Versuchs-durchgängen lösten im Durchschnitt am meisten Aufgaben richtig ($M = 10.5$, $SD = 1.6$). Diejenigen, die ihr Muster von einer additiven zur multiplikativen Integrationsregel veränderten ($M = 9.2$, $SD = 2.8$) lösten mehr Aufgaben richtig als Kinder, welche ihre multiplikative Regel zur additiven verschlechterten ($M = 7.1$, $SD = 2$), und Kinder, welche die additive Verknüpfungsstrategie in beiden Untersuchungen anwendeten, lösten am wenigsten Aufgaben richtig ($M = 7.05$, $SD = 3.2$).

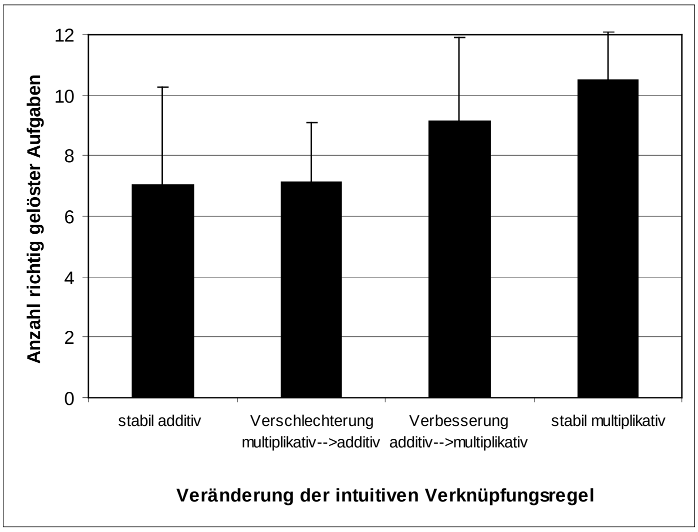


Abbildung 17. Durchschnittliche Anzahl richtig gelöster Mathematikaufgaben innerhalb der Regeländerungsgruppen.

Die Gruppe mit der additiven Verknüpfungsregel

Für weitere Berechnungen wurde jeweils die Gruppe der Kinder, welche von der additiven zur multiplikativen Verknüpfungsregel wechselte ($n = 16$), mit derjenigen, welche bei beiden Untersuchungen ein stabiles additives Muster zeigte ($n = 46$), verglichen. Dadurch sollte überprüft werden, ob Kinder, welche ihre intuitive Regel nach der Einführung der Multiplikation zur normativen Regel änderten, gewisse Aufgabentypen besser lösten als die Gruppe, welche ihre additive Integrationsregel nicht verbesserte. Die Stichprobe bezieht sich für die folgenden Auswertungen somit auf 62 Kinder. Um die Verteilung der Lösungshäufigkeit *zwischen* den Regelgruppen zu vergleichen, wurden auch hier Mann-Whitney-U-Tests durchgeführt, und mit weiteren χ^2-Tests wurde überprüft, ob *innerhalb* der Regeländerungsgruppen signifikant häufiger keine, eine oder beide Aufgaben gelöst wurden. Unterschiede in der Lösungshäufigkeit der einzelnen Aufgabentypen zwischen der Gruppe mit einer stabilen additiven Verknüpfungsregel und derjenigen, welche ihr Muster von additiv zu multiplikativ verbesserte, würden sich auch hier unter der Bedingung zeigen, dass einerseits signifikante Unterschiede in der Lösungshäufigkeit *zwischen* den Gruppen vorhanden sind und sich zusätzlich *innerhalb* der Regelanwendungsgruppen unterschiedliche Verteilungen in der Lösungshäufigkeit der Aufgaben zeigen. Der Übersicht halber wurden die Unterschiede innerhalb der Regeländerungsgruppen in der Fusszeile dargestellt. In Abbildung 18 ist für beide Regeländerungsgruppen die prozentuale Häufigkeit der Kinder dargestellt, welche jeweils beide Aufgaben eines Aufgabentyps richtig lösten.

Ein Mann-Whitney-U-Test zeigte, dass sich die beiden Regeländerungsgruppen in der Lösungshäufigkeit der Aufgaben zum Korrespondenzschema signifikant voneinander unterscheiden, $Z(62) = -2.66$, $p < .01$. Während Kinder mit einer stabilen additiven Verknüpfungsregel etwa gleich häufig keine, eine oder beide Aufgaben richtig lösten, hatten Kinder, die ihre intuitive Regel von additiv zu multiplikativ verbesserten, am häufigsten (75%) beide Aufgaben richtig gelöst.[7] Es zeigte sich somit, dass Kinder, welche ihr intuitives Muster verbesserten, beide Aufgaben dieses Aufgabentyps signifikant häufiger richtig lösen konnten als Kinder mit einem stabilen additiven Muster.

[7] Unterschiede innerhalb der Regeländerungsgruppe bei den Aufgaben zum Korrespondenzschema: stabil additiv ($\chi^2(2, N = 46) = 1.35$, $p = .51$), Verbesserung additiv zu multiplikativ ($\chi^2(2, N = 16) = 4.0$, $p < .05$)

Auch bei den zeitlich-sukzessiven Aufgaben mit bildhafter Darstellung unterschieden sich die beiden Gruppen signifikant voneinander, $Z(62) = -2.21$, $p < .05$. Während Kinder, welche bei beiden Untersuchungen die additive Verknüpfungsregel zeigten, etwa gleich häufig keine oder beide Aufgaben lösten, haben Kinder, die ihre intuitive Regel verbesserten, häufiger beide Aufgaben richtig gelöst (56.3%).[8] Auch dieser Aufgabentyp wurde, aufgrund der statistischen Werte, von Kindern, welche ihre intuitive Integrationsregel verbesserten, signifikant häufiger richtig gelöst als von Kindern mit einem stabilen additiven Muster.

Bei den zeitlich-sukzessiven Aufgaben mit symbolischer Darstellung unterschieden sich die Regeländerungsgruppen aufgrund der Lösungshäufigkeit nicht signifikant voneinander, $Z(62) = -1.55$, $p = .12$. Sowohl Kinder, welche ein stabiles additives Integrationsmuster zeigten, als auch Kinder, welche ihre intuitive Regel von additiv zu multiplikativ verbesserten, lösten am häufigsten beide Aufgaben richtig (67.4% / 87.5%).[9]

Beim Aufgabentyp „räumlich-simultan mit bildhafter Darstellung“ zeigten sich bezüglich der Lösungshäufigkeit keine signifikanten Unterschiede zwischen den beiden Regeländerungsgruppen, $Z(62) = -1.16$, $p = .25$. Die Aufgaben dieses Typs wurden von beiden Gruppen etwa gleich gut gelöst, wobei sie von den Kindern mit einer stabilen additiven Verknüpfungsregel etwas weniger häufig richtig gelöst wurden (35%) als von den Kindern, welche von der additiven zur multiplikativen Verknüpfungsregel wechselten (44%).[10]

Auch bei den Aufgaben des Typs „räumlich-simultan mit symbolischer Darstellung“ zeigte sich kein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Gruppen, $Z(62) = -1.53$, $p = .13$.

[8] Unterschiede innerhalb der Regeländerungsgruppe bei den Aufgaben „zeitlich-sukzessiv mit bildhafter Darstellung“: stabil additiv ($\chi^2(2, N = 46) = .57$, $p = .75$), Verbesserung additiv zu multiplikativ ($\chi^2(2, N = 16) = 4.63$, $p = .10$)

[9] Unterschiede innerhalb der Regeländerungsgruppe bei den Aufgaben „zeitlich-sukzessiv mit symbolischer Darstellung“: stabil additiv ($\chi^2(2, N = 46) = 24.30$, $p < .001$), Verbesserung additiv zu multiplikativ ($\chi^2(2, N = 16) = 21.13$, $p < .001$)

[10] Unterschiede innerhalb der Regeländerungsgruppe bei den Aufgaben “räumlich-simultan mit bildhafter Darstellung“: stabil additiv ($\chi^2(2, N = 46) = 4.74$, $p = .09$), Verbesserung additiv zu multiplikativ ($\chi^2(2, N = 16) = .88$, $p = .65$)

Die Hälfte der Kinder, welche in beiden Untersuchungen einer additiven Verknüpfungsregel zugeteilt wurden, lösten beide Aufgaben richtig. Von den Kindern, welche ihre intuitive Verknüpfungsregel von additiv zu multiplikativ verbesserten, konnten 75% beide Aufgaben richtig lösen.[11] Diese Aufgaben wurden somit von beiden Gruppen am häufigsten richtig gelöst.

Beim „Malaufgaben finden" löste mehr als die Hälfte der Kinder beider Gruppen alle Aufgaben richtig (58.7% / 62.6%). Es zeigten sich keine signifikanten Unterschiede zwischen den Gruppen, $Z(62) = -.34$, $p = .73$, und auch innerhalb der beiden Regeländerungsgruppen zeigten sich keine Unterschiede in der Lösungshäufigkeit.[12]

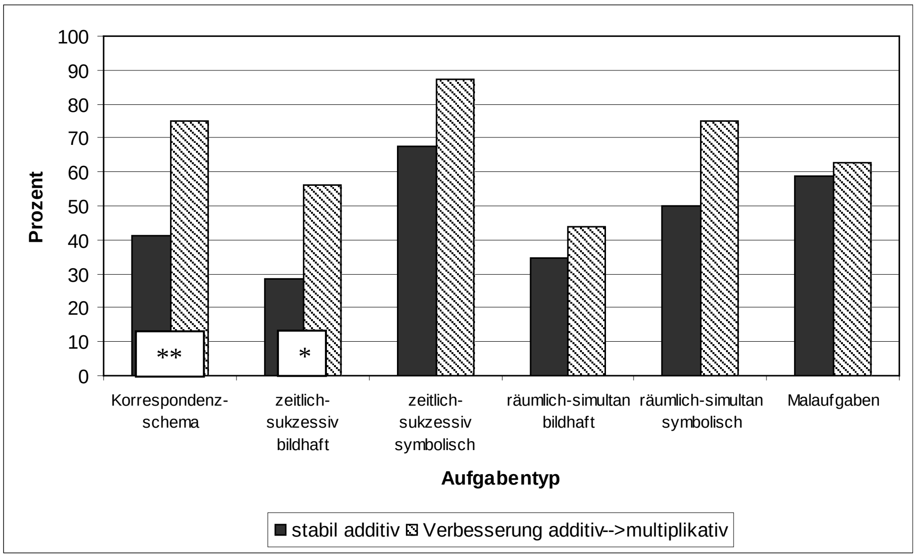


Abbildung 18. Kinder, welche beide Aufgaben richtig lösten, aufgeteilt nach der Veränderung der intuitiven Verknüpfungsregel.

Beim Vergleich der intuitiven Verknüpfungsregeln nach der Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht und den numerischen Fähigkeiten der Multiplikation zeigte sich ein signifikanter Unterschied bei den Aufgaben zum Korrespondenzschema und bei den zeitlich-sukzessiven Aufgaben mit bildhafter Darstellung. Kinder mit einer additiven

[11] Unterschiede innerhalb der Regeländerungsgruppe bei den Aufgaben „räumlich-simultan mit symbolischer Darstellung": stabil additiv ($\chi^2(2, N = 46) = 7.35, p < .05$), Verbesserung additiv zu multiplikativ ($\chi^2(2, N = 16) = 12.5, p < .01$)

[12] Unterschiede innerhalb der Regeländerungsgruppe bei den Aufgaben „Malaufgaben finden": stabil additiv ($\chi^2(2, N = 46) = 1.39, p = .24$), Verbesserung additiv zu multiplikativ ($\chi^2(2, N = 16) = 3.5, p = .32$)

Verknüpfungsregel bearbeiteten diese jeweils weniger gut als Kinder mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel. Im vorhergehenden Abschnitt zeigte sich zwischen Kindern, die in beiden Untersuchungen eine additive Verknüpfungsregel benutzten, und Kindern, welche von der additiven zur multiplikativen Verknüpfungsregel wechselten, ebenfalls ein signifikanter Unterschied bei diesen beiden Aufgabentypen. Dieses Ergebnis könnte daher auf die Gruppe mit der multiplikativen Regel zurückgeführt werden und würde somit nicht erstaunen. Ein weiterer Vergleich mit Kindern, welche in beiden Untersuchungen eine multiplikative Verknüpfungsregel verwendeten, brachte jedoch ein zusätzliches Ergebnis. Es zeigte sich, dass Kinder, welche bei beiden Erhebungen eine stabile multiplikative Integrationsregel benutzten (n = 7), besser waren als Kinder, welche beide Male die additive Verknüpfungsregel verwendeten, und dass sie jeweils beim Lösen der Multiplikationsaufgaben sogar tendenziell noch besser waren als diejenigen Kinder, welche ihre intuitive Verknüpfungsregel von additiv zu multiplikativ verbesserten. Aufgrund der kleinen Stichprobe dieser Gruppe kann jedoch nur von Tendenzen gesprochen werden.

3.4 Diskussion

3.4.1 Vor der Einführung der Multiplikation

Im ersten Teil dieser Untersuchung wurden anhand von Rechteckflächenschätzungen die intuitiven Verknüpfungsregeln von Kindern der zweiten Klasse erhoben, bei denen die Multiplikation im schulischen Unterricht noch nicht eingeführt worden war. Mit Aufgaben zum kleinen Einmaleins wurde geprüft, ob bereits Vorwissen in Bezug auf die Multiplikation vorhanden war, welches ausserhalb des Unterrichts erworben wurde.

Die gefundenen algebraischen Integrationsregeln zeigten wie erwartet, dass ein Grossteil der Kinder die Aufgabe in ihrer ganzen Komplexität erfassen konnte und die intuitiven Schätzungen der Rechteckflächen aufgrund einer Verknüpfung der Stimulusdimensionen Länge und Breite angaben. Bei 71% der Kinder erfolgte diese Verknüpfung aufgrund einer additiven Regel (Länge + Breite) und 17% benutzten die normative multiplikative Regel (Länge x Breite). Bei 12% der Kinder konnte keine Integrationsregel gefunden werden. Diese Versuchspersonen hatten höchstwahrscheinlich die Aufgabe nicht verstanden und urteilten nach einer anderen Strategie. Manchmal wurde z.B. beobachtet, dass die Flächen abwechslungsweise einmal ganz links und einmal ganz rechts auf der Antwortskala geschätzt wurden. Die gefundenen Ergebnisse stimmten mit den Resultaten der 8-jährigen Kinder aus der Studie von Wilkening (1979) überein; auch dort ergaben die individuellen Daten, dass der grösste Teil der Kinder eine additive Integrationsregel benutzte. In seiner Studie konnte ebenfalls bei einigen Versuchspersonen keine Antwortstrategie gefunden werden.

Im Theorieteil wurde bereits beschrieben, dass im heutigen Mathematikunterricht das Schwergewicht auf die Einer-, Zweier-, Fünfer- und Zehnerreihe (Kern- oder Königsaufgaben) gelegt und auf das Verstehen der Zusammenhänge der Reihen untereinander hingearbeitet wird. Früher wurden zuerst die „einfachen“ und dann die „schwierigen“ Einmaleinsreihen gelernt. Eine typische Anordnung war z.B. Zweier-, Vierer-, Zehner-, Fünfer-, Dreier-, Sechser-, Achter-, Neuner- und Siebnerreihe (Lorenz & Radatz, 1993; Wittmann & Müller, 1990). Die Lösungshäufigkeit der Multiplikations-aufgaben dieser Untersuchung liess ebenfalls eine Einteilung in drei Schwierigkeitsstufen zu: einfache, mittlere und schwierige Aufgaben. Dabei zeigte sich, dass die einfachen Aufgaben, welche von über 48% der Kinder richtig gelöst wurden, die sogenannten Kernaufgaben waren. Aufgaben aus der Dreier-, Vierer-, Sechser- und Neunerreihe wurden von 25 – 40% der Kinder richtig gelöst und die Aufgaben aus der Siebner- und Achterreihe jeweils von weniger als 10%. Die Häufigkeit der gelösten Aufgaben könnte auch aufgrund der Grösse der Produkte zustande gekommen sein: Die Produkte der „einfachen“ Aufgaben waren Zahlen unter 20, die Lösungen der „mittleren“ Aufgaben befanden sich zwischen 18 und 28 und die Produkte der „schwierigen“ Aufgaben waren die grössten Zahlen, über 50. Die Aufgabe 10 x 9 stellte bei dieser Einteilung eine Ausnahme dar. Eigentlich wird die Neunerreihe zu den „schwierigen“ Reihen gezählt, zudem war das Resultat dieser Aufgabe die grösste Zahl des Aufgabenblattes. Diese Aufgabe wurde jedoch von knapp 40% der Kinder richtig gelöst. Daraus könnte geschlossen werden, dass die Kinder hier das Kommutativ- oder Vertauschungsgesetz (10 x 9 = 9 x 10) anwendeten und diese Aufgabe daher der Zehnerreihe zuordneten. Zudem dürfte oft bereits gelernt worden sein, dass Aufgaben aus der Zehnerreihe analog derjenigen aus der Einerreihe gelöst werden und danach eine Null hinzugefügt wird. Insgesamt stellte das Lösen der Aufgaben zum kleinen Einmaleins für die Kinder kein Problem dar; 41% konnten mehr als die Hälfte der Aufgaben richtig lösen, obwohl sie dies in der Schule noch nicht gelernt hatten. Als Grund für das bereits vorhandene Vorwissen in der Multiplikation wurden Eltern oder ältere Geschwister genannt.

In früheren Untersuchungen zu Einmaleinsaufgaben konnten sowohl bei Kindern als auch bei Erwachsenen Lösungseffekte festgestellt werden (vgl. Campbell & Graham, 1985; De Brauwer, Verguts, & Fias, 2006; Koshmider & Ashcraft, 1991). Die Schwierigkeiten bei der Siebner- und Achterreihe sowie die Lösungshäufigkeit bei den anderen Aufgaben könnten daher mit dem in diesen Studien als *problem-size-effect*[13] beschriebenen Phänomen erklärt werden. Dieses besagt, dass Aufgaben mit niedrigen Zahlen einfacher zu lösen sind als Aufgaben mit grossen Zahlen. Der *five-effect*, dass Aufgaben, bei welchen der Operand oder Operator eine Fünf ist, leichter zu lösen sind als andere, wurde in der vorliegenden Untersuchung ebenfalls entdeckt. Oft wurde während der Datenerhebung beobachtet, dass die Kinder beim Lösen der Aufgaben die Finger zu Hilfe nahmen. Nur selten konnten die Resultate auswendig hingeschrieben werden; meistens wurden die Aufgaben mit der

[13] auch *problem-difficulty-effect* genannt

wiederholten Addition gelöst. Nach Angaben der Lehrpersonen werden bereits in der ersten Klasse Aufgaben gelöst, welche die wiederholte Addition beinhalten. Aufgrund dieses Vorwissens der Kinder erscheint diese Lösungsstrategie daher durchaus sinnvoll. Die Zuhilfenahme der Finger bei den Multiplikationsaufgaben ist eine Technik, welche nur angewendet werden kann, wenn auch Einheiten gebildet werden können. Oft wurde beobachtet, dass die Kinder mit den Fingern der einen Hand die Anzahl Replikationen zählten, welche sie mit der wiederholten Addition machten. Diese Lösungsstrategie erfordert hohe kognitive Anforderungen an die Kinder: Einerseits muss das Zwischenergebnis im Kopf behalten und andererseits mitgezählt werden, wie oft eine Einheit bereits dazu addiert wurde. Diese Beobachtungen bieten somit eine Erklärung für den *problem-size-effect:* Je grösser die gesuchten Produkte waren, desto öfter haben sich die Kinder beim Zusammenzählen der Operanden verrechnet. Oft wurde beobachtet, dass die Zwischenergebnisse vergessen und mit einer falschen Zahl weitergerechnet wurde.

Die Anzahl der gelösten Einmaleinsaufgaben hatte keinen Zusammenhang mit den intuitiven Verknüpfungsregeln bei der Schätzung der Rechteckflächen. Kinder, welche die normative multiplikative Integrationsregel benutzten, lösten im Durchschnitt zwar etwas mehr Aufgaben richtig, dieser Unterschied war jedoch nicht signifikant. Die nicht erfolgte korrekte Verknüpfung der Länge und Breite scheint somit nicht mit dem fehlenden Vorwissen zu der Operation der Multiplikation zusammenzuhängen. Dieses Ergebnis erstaunt jedoch nicht; in der Literatur ist man sich einig, dass beim Lösen einfacher Multiplikationsaufgaben lediglich auswendig gelerntes Multiplikationswissen aus dem Gedächtnis abgerufen wird (De Brauwer & Fias, 2009; Koshmider & Ashcraft, 1991). Auch Outhred und Mitchelmore (2000) zeigten in ihrer Untersuchung, dass das Lösen von Einmaleinsaufgaben keinen Indikator für ein multiplikatives Verständnis darstellt. Den von ihnen untersuchten Kindern gelang das Beantworten von Einmaleinsrechnungen trotz unterschiedlichem Level des Verständnisses der Multiplikation gleich schnell. Clark und Kamii (1996) entdeckten ebenfalls, dass Kinder oft die Multiplikationstafeln auswendig beherrschen, aber nicht multiplikativ, sondern immer noch additiv denken. Im Hinblick auf den Erwerb eines multiplikativen Verständnisses macht es daher Sinn, die Einmaleinsaufgaben der Multiplikation über die Kernaufgaben zu lernen und die weiteren Aufgaben über Zerlegen, Verdoppeln oder Vertauschen abzuleiten. Dadurch wird auch eine

Vorstellung über die ungefähre Grösse des Resultates aufgebaut, wodurch Rechnungsfehler reduziert werden.

3.4.2 Nach der Einführung der Multiplikation

Nach der Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht wurde erneut das Experiment zur Schätzung von Rechteckflächen durchgeführt, und somit wurden die intuitiven Verknüpfungsregeln ein zweites Mal erhoben. Zusätzlich lösten die Kinder ein Arbeitsblatt mit verschiedenen Multiplikationsaufgaben.

Bei 70% der Kinder konnte eine additive Verknüpfung der Stimulusdimensionen Länge und Breite gefunden werden, knapp 30% antworteten mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel und nur ein Kind konnte aufgrund der Schätzungen keiner Regel zugeteilt werden. Die durchschnittlichen Urteile der gesamten Altersgruppe ergaben insgesamt ein multiplikatives Muster. Auch bei dieser Erhebung wurden die intuitiven Integrationsregeln, welche in anderen Untersuchungen zur Schätzung von Rechteckflächen gefunden wurden, weitgehend repliziert (vgl. Silverman & Paskewitz, 1988; Wilkening, 1979).

Das richtige Lösen der verschiedenen Multiplikationsaufgaben gelang den Kindern je nach Aufgabentyp unterschiedlich gut. Die Aufgaben in reiner Textform wurden am häufigsten richtig gelöst, die zeitlich-sukzessiven etwas besser als diejenigen des räumlich-simultanen Modells. Dabei ist anzumerken, dass es bei der Lösungshäufigkeit der Satzaufgaben keine Unterschiede zwischen den Klassen gab, dies, obwohl teilweise Klassen mit einem sehr hohen Anteil fremdsprachiger Kinder untersucht wurden. Die sprachliche Komponente schien somit bei diesen Aufgaben keine Rolle gespielt zu haben. Von den Aufgaben mit bildhafter Darstellung wurden diejenigen zum Punktefeld (räumlich-simultanes Modell) etwas besser gelöst als die Aufgaben zum Pfeilwerfen (zeitlich-sukzessiv). Alle Lehrpersonen bestätigten, dass Aufgaben zum Punktefeld in ihrer Klasse intensiv behandelt worden waren. Diese Aufgaben waren den Kindern somit vertraut, was erklären würde, weshalb sie auch häufiger richtig gelöst wurden als diejenigen zum Pfeilwerfen. Der Unterschied, welcher zwischen den Satzaufgaben und Aufgaben mit bildhafter Darstellung gefunden wurde, könnte folgendermassen erklärt werden: Die Satzaufgaben waren für die

Kinder am einfachsten zu lösen, da dafür keine bildhafte Darstellung interpretiert werden musste. Innerhalb der Aufgaben mit bildhaften Darstellungen schien die Vertrautheit die Lösungshäufigkeit beeinflusst zu haben. Gemäss Bruner (1966, zitiert nach Mason & Johnston-Wilder, 2004) baut die symbolische Darstellung einer Aufgabe (in Textform oder in Zahlen) jedoch auf der bildhaften oder ikonischen Ebene auf und wäre somit die am schwierigsten zu verstehende Darstellungsform. Dies war in der vorliegenden Untersuchung jedoch nicht der Fall. Ein signifikanter Unterschied in der Lösungshäufigkeit zwischen den Aufgabentypen „zeitlich-sukzessiv" und „räumlich simultan" konnte nicht gefunden werden; diese zwei Grundmodelle wurden gleich gut gelöst. Ein Grund dafür könnte sein, dass beide Aufgabentypen zur Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht verwendet und somit intensiv behandelt wurden.

Das Lehrmittel, welches die Primarlehrpersonen benutzten, war Mathematik 2[14] (Hohl, et al., 2004). In diesem Buch werden unterschiedliche Aufgabentypen behandelt: numerische Aufgaben, Satzaufgaben sowie verschiedene bildhafte Darstellungsformen. Nach den numerischen Aufgaben sind Satzaufgaben die meistverbreiteten Aufgabentypen in diesem Lehrbuch, bildhafte Darstellungen sind am seltensten anzutreffen. Die Leistungen der Kinder bei den Aufgaben der vorliegenden Untersuchung stimmen somit mit den behandelten Aufgaben im Lehrmittel überein. Die Kompetenzen der Kinder scheinen durch die Aufgabenart in den Lehrbüchern geprägt zu sein.

Park und Nunes (2001) stellten in ihrer Untersuchung die Hypothese auf, dass ein richtiges multiplikatives Verständnis auf dem Wissen über das *scheme of correspondence* basiert, also dem Wissen über eine invariante Beziehung zwischen zwei Quantitäten. Dies wird nach ihnen mit Aufgaben geübt, welche in der vorliegenden Untersuchung als „Korrespondenzschema" bezeichnet wurden. Nach Nunes und Bryant (1998) ist das Verständnis des Korrespondenzschemas einer der Hauptunterschiede zwischen dem additiven und dem multiplikativen Denken. In der vorliegenden Untersuchung waren diese Aufgaben vom Schwierigkeitsgrad bzw. anhand der Lösungshäufigkeit zwischen der symbolischen Darstellungsform und der bildhaften Darstellung einzuordnen. Es muss betont werden, dass dieser Aufgabentyp in den Schulbüchern der zweiten Klasse noch nicht

[14] Ab dem Schuljahr 2011/2012 wird mit einer überarbeiteten Version dieses Mathematiklehrmittels unterrichtet, die untersuchten Klassen arbeiteten jedoch noch mit der alten Version.

behandelt wird. Eine Aufteilung der Kinder aufgrund der intuitiven Verknüpfungsregel bei der Flächenschätzung ergab einen signifikanten Unterschied bei diesem Aufgabentyp. Die Kinder mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel lösten beide Aufgaben signifikant häufiger richtig als Kinder mit einer additiven Verknüpfungsregel. Betrachtet man das Verständnis des Korrespondenzschemas als Vorstufe zum proportionalen Denken, so ist es nicht verwunderlich, dass Kinder mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel bei der Flächenschätzung diesen Aufgabentyp besser bearbeiten konnten. Eine multiplikative Verknüpfung der Länge und Breite erfordert im Gegensatz zur additiven Verknüpfung, dass die Grössen der Rechteckflächen proportional zueinander beurteilt werden können. Würde man multiplikatives Verständnis mit dem richtigen Lösen von Aufgaben zum Korrespondenzschema gleichsetzen, so könnte die Hypothese aufgestellt werden, dass Kinder mit einer intuitiven multiplikativen Verknüpfungsregel auch eher ein multiplikatives Verständnis besitzen. Aufgrund der Aufgaben in dieser Untersuchung konnte jedoch nicht unterschieden werden, ob die konstante Beziehung wirklich erkannt wurde, denn grundsätzlich waren sie auch mit der wiederholten Addition lösbar.

Bei den Aufgaben zum Pfeilwerfen, welche für die Kinder am schwierigsten waren, zeigte sich in Bezug auf die intuitiven Verknüpfungsregeln das gleiche Bild wie beim Korrespondenzschema: Kinder mit einer multiplikativen Integrationsregel bei der Flächenschätzung lösten diesen Aufgabentyp signifikant besser als diejenigen mit einer additiven Verknüpfungsregel. Jedoch konnte auch bei diesen Aufgaben nicht unterschieden werden, ob sie mit der wiederholten Addition oder direkt multiplikativ gelöst wurden.

Die einzigen Aufgaben, bei welchen aufgrund der Lösungsstrategie unterschieden werden konnte, ob sie multiplikativ oder mit der wiederholten Addition gelöst wurden, waren die Aufgaben zum Punktefeld, da bei diesen jeweils explizit nach der Lösungsstrategie gefragt wurde. Dabei zeigte sich, dass Kinder mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel beide Aufgaben signifikant häufiger lösten, indem sie die Punkte der Länge und Breite zählten und diese dann miteinander multiplizierten. Die Gruppe mit der additiven Verknüpfungsregel löste die Aufgabe zwar ebenfalls zu einem Drittel mit dieser Strategie, jedoch oft auch durch das Addieren der Reihen - dies, obwohl das Lösen der Aufgaben zum Punktefeld im schulischen Unterricht behandelt worden war. Daher könnte lediglich bei diesem Aufgabentyp von einem besseren multiplikativen Verständnis der Kinder mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel gesprochen werden. In der Untersuchung von Mulligan und Mitchelmore (1997) wurde unter anderem festgestellt, dass bei unbekannten Aufgaben oft auf die vereinfachte Lösungsstrategie der wiederholten Addition zurückgegriffen wird. Die Charakteristik einer Aufgabe scheint somit ebenfalls daran beteiligt zu sein, welches implizite Modell bzw. welche Strategie zur Lösung benutzt wird. Da die impliziten Modelle nach Mulligan und Mitchelmore (1997) einen progressiven Verlauf zeigen, könnte daraus geschlossen werden, dass Kinder, welche unbekannte Aufgabentypen mit der direkten Multiplikation lösen, auf Anhieb die multiplikative Struktur erkennen. Die additive Integrationsregel mit einem additiven Verständnis gleichzusetzen wäre jedoch zu weit gegriffen, da selbst Kinder mit einer additiven Verknüpfungsregel Aufgaben zum Punktefeld teilweise mit der direkten Multiplikation lösen konnten. Anghileri (1989) zeigte in ihrer Untersuchung einen Zusammenhang zwischen Lösungsstrategien und der mathematischen Begabung. Während überdurchschnittlich begabte Kinder bei sämtlichen Aufgabentypen am häufigsten direkt multiplizierten, benutzten durchschnittlich begabte Kinder manchmal auch andere Kalkulationsstrategien wie z.B. die wiederholte Addition.

Aufgrund der Resultate dieser Untersuchung kann die Hypothese aufgestellt werden, dass Kinder mit einer multiplikativen Integrationsregel ihnen unbekannte Aufgabentypen besser bearbeiten können als die Kinder mit einer additiven Verknüpfungsregel. Führt man diesen Gedanken weiter, könnte daraus geschlossen werden, dass Kinder mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel ihr multiplikatives Wissen und die gelernten Lösungsstrategien zuverlässig und richtig einsetzen können, was beinhalten würde, dass eine multiplikative Struktur selbst in einer ihnen unbekannten Aufgabe oder bei einem ihnen unbekannten Aufgabentyp erkannt wird. Dies würde mit den Resultaten von (Mulligan, Mitchelmore, & Prescott, 2005; Mulligan, Mitchelmore, & Prescott, 2006) übereinstimmen, da nach ihnen mathematische Leistung stark mit der Wahrnehmung von mathematischen Strukturen korreliert. Nur wenn Kinder Muster und strukturelle Beziehungen in mathematischen Situationen wiedererkennen können, entwickelt sich auch ein mathematisches Konzept.

Einen weiteren Hinweis auf einen Zusammenhang zwischen dem intuitiven Wissen und den numerischen Fähigkeiten lieferte das Ergebnis, dass Kinder mit einer intuitiven multiplikativen Verknüpfungsregel insgesamt am meisten Multiplikationsaufgaben richtig lösen konnten. Dass diese beiden Wissensformen zusammenhängen, wurde bereits in der

Untersuchung von Ebersbach und Resing (2008) zum Wissen über lineares und exponentielles Wachstum gezeigt, wobei in ihrer Untersuchung das explizite Wissen über die verbalen Antworten der Kinder zu den Schätzungen erhoben wurde. Die Aussage von Wilkening et al. (1997), dass ein korrektes implizites Wissen nicht garantiert, dass es auch ins explizite transferiert wird, könnte durch die folgende Hypothese modifiziert werden: Explizites Wissen, welches im schulischen Unterricht beigebracht wird, kann bei neuen Problemstellungen besser richtig angewendet werden, wenn auch das korrekte intuitive Wissen dazu vorhanden ist. Dies würde bedeuten, dass ein korrektes intuitives Wissen zwar nicht ins explizite Wissen transferiert wird, dass es jedoch für das explizite Wissen förderlich ist. Einen ähnlichen Zusammenhang sehen auch Ahl, Moore und Dixon (1992). Sie untersuchten, unter welchen Bedingungen eine Beziehung zwischen intuitiven und numerischen Leistungen beim proportionalen Denken zu erwarten ist. Dabei kamen sie zum Schluss, dass dafür einerseits die Verfügbarkeit von intuitivem Wissen im Gedächtnis sowie die mathematischen Operationen und Formeln vorhanden sein müssen. Weiter braucht es die Fähigkeit, diese beiden Wissensformen gegeneinander abzuwägen und Analogien zwischen dem intuitiven Verständnis und den gelernten mathematischen Lösungsstrategien zu bilden. Unter diesen Voraussetzungen wird nach ihnen am ehesten ein Zusammenhang zwischen diesen beiden Wissensformen gefunden.

3.4.3 Veränderung der intuitiven Verknüpfungsregeln durch das Erlernen der numerischen Multiplikation im schulischen Unterricht

Gemäss eigenen Angaben benötigten die Lehrpersonen für die Einführung der Multiplikation zwischen 40 und 65 Lektionen. Das verwendete Lehrmittel war in allen Klassen dasselbe, je nach Lehrperson wurde unterschiedliches Zusatzmaterial verwendet. Zwischen den Schulklassen gab es keine signifikanten Unterschiede in Bezug auf die Veränderung der intuitiven Verknüpfungsregeln. Daraus kann geschlossen werden, dass nicht eine bestimmte Lehrmethode oder ein Lehrmaterial die Regeländerungen verursachte.

Die Verteilung der intuitiven Integrationsregeln vor und nach der Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht zeigten signifikante Unterschiede. Während die Anzahl Kinder mit einer additiven Regel ungefähr gleich blieb, gab es zum zweiten Untersuchungszeitpunkt 10% mehr Kinder, welche bei der intuitiven Schätzung der

Rechteckflächen eine multiplikative Verknüpfungsregel verwendeten, dafür gab es nur noch ein Kind, welches keiner Regel zugeteilt werden konnte. Eine genauere Analyse der Veränderungen ergab jedoch, dass es nicht nur Regeländerungen in Richtung normativer Regel gab, sondern auch Regelverschlechterungen. Knapp 10% der Kinder, welche zum ersten Untersuchungszeitpunkt eine multiplikative Verknüpfungsregel anwendeten, benutzten bei der zweiten Untersuchung eine additive Regel. Insgesamt muss somit beachtet werden, dass die intuitiven Muster nicht sehr stabil zu sein schienen, denn lediglich 68% der Kinder benutzten beide Male dieselbe Verknüpfungsregel.

Die Veränderungen könnten aufgrund verschiedenster Umstände zustande gekommen sein: durch das Erlernen der Multiplikation, durch einen Wiederholungseffekt bei der Schätzungsaufgabe und somit durch die Vertrautheit mit dem Stimulusmaterial, jedoch könnten auch Lerneffekte im Alltag oder im Elternhaus daran beteiligt gewesen sein. Da in dieser Studie das ausserschulische Lernen nicht erhoben wurde, kann über Letzteres nichts ausgesagt werden. Ein Effekt durch das explizite Erlernen der Operation der Multiplikation kann nicht gänzlich ausgeschlossen werden. Aufgrund der relativ kleinen Anzahl Kinder, die ihre intuitive Verknüpfungsregel verbesserten, kann jedoch davon ausgegangen werden, dass die Einführung der Multiplikation in der Schule nicht der wichtigste Faktor für die Veränderungen war. Es scheint eher unwahrscheinlich, dass der Übergang von einer additiven Regel zur multiplikativen Regel mit dem in der Schule erworbenen Wissen zu tun hat. Dies steht im Einklang mit bisherigen Untersuchungen, die zeigten, dass sich das intuitive Wissen oft unabhängig vom expliziten zu entwickeln schien (Krist, et al., 1993). Es bleibt jedoch weiterhin unklar, aus welchem Grund manche Kinder ihre intuitive Regel änderten und andere nicht.

Auffallend ist, dass bei der zweiten Erhebung nur noch bei einem einzigen Kind kein intuitives Muster mehr gefunden werden konnte. Bei der ersten Untersuchung wurde das Fehlen einer intuitiven Verknüpfungsregel auf Verständnisprobleme zurückgeführt. Die Wiederholung der Aufgabe zur Schätzung der Rechteckflächen könnte somit eine Vertrautheit mit der Aufgabenstellung und dem Stimulusmaterial bewirkt haben, was der Grund für das Wegfallen eines inkonsistenten intuitiven Musters sein könnte. Die Mittelwerte der Rechteckflächenschätzungen näherten sich zum zweiten Untersuchungszeitpunkt, über die gesamte Stichprobe gerechnet, der normierten Lösung. Dies ist ein weiterer Hinweis darauf, dass die Verbesserungen der intuitiven Verknüpfungsregeln mit der Wiederholung der Aufgabe zu tun haben könnten. Selbst wenn es nicht möglich war, sich sämtliche Rechteckflächen zu merken, waren die Kinder zum zweiten Untersuchungszeitpunkt mit den Rechtecken vertraut und hatten eine ungefähre Ahnung von den Grössenordnungen. Dies dürfte ihnen geholfen haben, die Flächen innerhalb der Skala einzuordnen. Darüber, weshalb einige Kinder bei der zweiten Erhebung vereinfachte Verknüpfungsregeln verwendeten und weshalb nicht alle von dem Wiederholungseffekt profitierten, kann nichts ausgesagt werden.

Betrachtet man die gelösten Multiplikationsaufgaben der Kinder in Bezug auf die Veränderung ihrer intuitiven Integrationsregel nach der Einführung der Multiplikation, so zeigte sich folgendes Bild: Kinder, welche ihre intuitive Regel verschlechterten oder stabil additiv behielten, lösten insgesamt weniger Aufgaben richtig als Kinder, welche ihre Verknüpfungsregel verbesserten. Einen Hinweis darauf, dass dieser signifikante Unterschied jedoch nicht nur mit der Anzahl multiplikativer Regeln innerhalb dieser Gruppe zusammenhängt, zeigte das Ergebnis, dass Kinder mit einer stabilen multiplikativen Regel tendenziell noch besser waren als diejenigen, welche beim ersten Mal die Länge und Breite additiv und beim zweiten Mal multiplikativ verknüpften.

Aufgeteilt auf die einzelnen Aufgabentypen ergab sich ebenfalls, dass die Gruppe mit einer stabilen additiven Verknüpfungsregel bei den einzelnen Aufgabentypen schlechter abschnitt als die Gruppe, welche ihr intuitives Muster zur normativen Regel verbesserte. Dieser Unterschied war signifikant bei den Aufgaben zum Pfeilwerfen (zeitlich-sukzessiv mit bildhafter Darstellung) und jenen zum Korrespondenzschema. Kinder, welche ihre multiplikative Verknüpfungsregel zu beiden Untersuchungszeitpunkten stabil behielten, waren auch hier bei beiden Aufgabentypen tendenziell noch etwas besser als die Gruppe, welche ihre intuitive Regel von additiv zu multiplikativ verbesserte. Bezüglich der expliziten Leistung bei den Multiplikationsaufgaben konnte somit jeweils folgende Reihenfolge der Regeländerung entdeckt werden: Am besten waren Kinder mit einer stabilen multiplikativen Regel, danach diejenigen, welche eine Verbesserung von additiv zu multiplikativ machten, darauf folgte die Gruppe, welche ihre multiplikative Regel zur additiven verschlechterte, und am wenigsten Aufgaben lösten Kinder mit einer stabilen additiven Regel. Daraus könnte folgende Hypothese abgeleitet werden: Je besser und stabiler eine intuitive Regel ist, desto besser kann das numerische Wissen bei unbekannten Aufgabentypen angewendet werden.

Ein weiteres Ergebnis dieser Untersuchung war, dass Kinder, welche bereits ein multiplikatives Vorwissen hatten, tendenziell häufiger ihre Integrationsregel von additiv zu multiplikativ veränderten oder ihr multiplikatives Muster stabil behielten. In der vorliegenden Untersuchung galt Vorwissen zur Multiplikation als vorhanden, wenn eine gewisse Anzahl von Aufgaben zum kleinen Einmaleins richtig gelöst werden konnte, obwohl diese im schulischen Unterricht noch nicht gelernt wurden. Kinder, denen dieses Vorwissen fehlte, verschlechterten häufig ihre multiplikative Integrationsregel zur additiven Regel oder verwendeten eine stabile additive Verknüpfungsregel. Aufgrund dieses Resultats können folgende Hypothesen aufgestellt werden: Es ist möglich, dass das Vorwissen einen Indikator für die Förderung durch das Elternhaus darstellt. Diese Kinder wuchsen in einer Umgebung auf, in welcher sie mehr unterstützt wurden und auch mehr Erfahrungen machen konnten als andere Kinder. Die Vorkenntnisse könnten jedoch auch einen Indikator für die Wissbegierde der Kinder darstellen. Dies würde bedeuten, dass diese Kinder neugieriger sind als andere Kinder und somit von sich aus interessiert sind, Neues zu lernen und Erfahrungen zu machen. Diese Neugierde und das persönliche Interesse daran, die Umwelt zu erforschen und zu verstehen, könnte auch mit der intrinsischen Motivation verglichen werden. Darunter wird das angeborene Bedürfnis nach Kompetenz verstanden, wobei dieses aus der Handlung oder dem Ergebnis selbst entspringt und nicht aus extrinsischen Anreizen wie z.B. einer Belohnung (Deci & Ryan, 1985; White, 1959). Gottfried (1990) zeigte in seiner Untersuchung, dass die intrinsische Motivation unter anderem auch mit der Leistung und dem IQ zusammenhängt.

3.5 Fazit der ersten empirischen Untersuchung und Überleitung zur zweiten Untersuchung

Kinder mit einer intuitiven multiplikativen Verknüpfungsregel zeigten in dieser Untersuchung insgesamt bessere Leistungen beim Lösen der Multiplikationsaufgaben als diejenigen mit einem additiven Muster. Signifikant war dieser Unterschied bei dem Aufgabentyp „zeitlich-sukzessiv mit bildhafter Darstellung“, bei den Aufgaben zum Korrespondenzschema und bei der Lösungsstrategie der Aufgaben zum Punktefeld (räumlich-simultan mit bildhafter Darstellung). Bezüglich der Regeländerung zeigten Kinder, welche zu beiden Untersuchungszeitpunkten eine multiplikative Integrationsregel verwendeten, jeweils die besten Leistungen. Die Gruppe, welche ihr Muster von einer additiven zur multiplikativen Regel änderte, war besser als diejenige, welche ihre Verknüpfungsregel von multiplikativ zu additiv vereinfachte. Die schlechtesten Leistungen zeigten Kinder, welche zu beiden Untersuchungszeitpunkten eine additive Regel verwendeten. Ein intuitives multiplikatives Muster stand in der vorliegenden Untersuchung somit im Zusammenhang mit besseren Leistungen beim Lösen von Multiplikationsaufgaben, welche als Indikator für numerisches multiplikatives Wissen dienten.

Eine Verbesserung der intuitiven Verknüpfungsregel könnte mit der Wiederholung der Aufgabe zur Schätzung der Rechteckflächen zu tun haben. Dass eine Vertrautheit mit dem Stimulusmaterial eine Regelverbesserung bewirken kann, zeigte bereits Wolf (1995). Die Frage, weshalb sich die intuitiven Muster teilweise verschlechterten, konnte in dieser Untersuchung nicht beantwortet werden.

Aufbauend auf diesen Ergebnissen wurden in der zweiten Untersuchung vier verschiedene 10-minütige Interventionen durchgeführt. Das Verständnis des Korrespondenzschemas stellt gemäss der Theorie von Nunes und Bryant (1998) einen wichtigen Indikator für multiplikatives Wissen dar. Aus diesem Grund wurde eine Intervention gewählt, bei der Multiplikationsaufgaben, welche das Korrespondenzschema beinhalten, geübt wurden. In der Arbeit von Battista et al. (1998) wurde die Wichtigkeit des Erkennens der Gitterstruktur in einer Fläche betont. Daher wurde eine weitere Intervention zum Flächenschema und der dazugehörigen Lösungsstrategie herausgearbeitet. Bei den Multiplikationsaufgaben, bei welchen in der ersten Untersuchung zu vorgegebenen Produkten die Rechnungen gefunden werden mussten, konnte kein signifikanter Unterschied zwischen den Gruppen mit den verschiedenen intuitiven Regeln gefunden wurden. Aus diesem Grund wurden diese Aufgaben als „neutrale“ Intervention verwendet, als Intervention, welche im Zusammenhang mit der Multiplikation steht, bei der jedoch kein Effekt erwartet wurde. Mit der Kontrollgruppe wurde 10 Minuten lang ein Memory gespielt.

Die intuitiven Muster wurden diesmal in kürzeren Zeitabständen erhoben, um zu verhindern, dass Lerneffekte durch ausserschulische Faktoren (z.B. durch das Elternhaus) die Integrationsregeln beeinflussen konnten. Eine Trainingseinheit von 10 Minuten wurde gewählt, da Wolf (1995) zeigen konnte, dass bereits eine so kurze Intervention eine Regeländerung bewirken kann. Die Untersuchung zur Stabilität einer allfälligen Regeländerung wurde eine Woche später durchgeführt.

4 Empirische Untersuchung 2: Interventionsstudie

4.1 Einleitung und Fragestellung

In der ersten empirischen Untersuchung konnte gezeigt werden, dass das Erlernen der Multiplikation im schulischen Unterricht nicht der Grund für eine Verbesserung der intuitiven Verknüpfungsregeln ist. Das Ziel dieser zweiten empirischen Untersuchung war es daher, herauszufinden, ob durch verschiedene Interventionen, welche sich auf das explizite Wissen der Multiplikation beziehen, eine Verbesserung der intuitiven Verknüpfungsregeln bewirkt werden kann und ob eine allfällige Veränderung stabil ist. Im Methodenteil werden die Interventionen genauer beschrieben. Diese Untersuchung fand zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten statt, wobei die zweite Erhebung jeweils genau eine Woche nach der ersten stattfand.

4.2 Methode

4.2.1 Versuchspersonen

In dieser Folgeuntersuchung wurden Kinder aus dritten Primarschulklassen untersucht. Es war somit gewährleistet, dass das Thema „Multiplikation“ im schulischen Unterricht bereits vollständig bearbeitet und geübt worden war. Zum ersten Untersuchungszeitpunkt wurden 104 Kinder untersucht, davon waren 56 Mädchen und 48 Knaben. Mit allen Kindern konnten die Schätzung der Rechteckflächen sowie die Intervention problemlos durchgeführt werden. Am zweiten Untersuchungstag, eine Woche später, wurden nochmals dieselben Kinder untersucht. Zwei Mädchen, welche bei der ersten Untersuchung mitmachten, konnten aus Krankheitsgründen nicht an der zweiten teilnehmen, daher bestand diese Stichprobe nur aus 102 Kindern (54 Mädchen, 48 Knaben).

Insgesamt wurden sieben verschiedene Schulklassen im Kanton Zürich untersucht. Im Durchschnitt waren die Kinder am ersten Untersuchungstag 9 Jahre alt (Altersbereich: 8;3 - 10;8 Jahre). Alle Kinder hatten die schriftliche Erlaubnis der Eltern, um an der Studie teilzunehmen. Die Auswahl der Schulhäuser war zufällig.

4.2.2 Versuchsplan

Die intuitiven Verknüpfungsregeln wurden mit dem Experiment zur Schätzung von Rechteckflächen insgesamt dreimal erhoben. In Abbildung 19 ist der Ablauf der Untersuchung ersichtlich. Zuerst wurden die intuitiven Verknüpfungsregeln vor der Intervention erhoben (Baseline-Erhebung), ein zweites Mal wurde das Experiment zur Schätzung der Rechteckflächen nach der Intervention durchgeführt (Posttest 1) und eine Woche später fand die dritte Erhebung der intuitiven Verknüpfungsregeln statt (Posttest 2). Zwischen der Baseline-Erhebung und dem Posttest 1 wurde mit jedem Kind eine von vier Interventionen durchgeführt, welcher sie zufällig zugeteilt wurden.

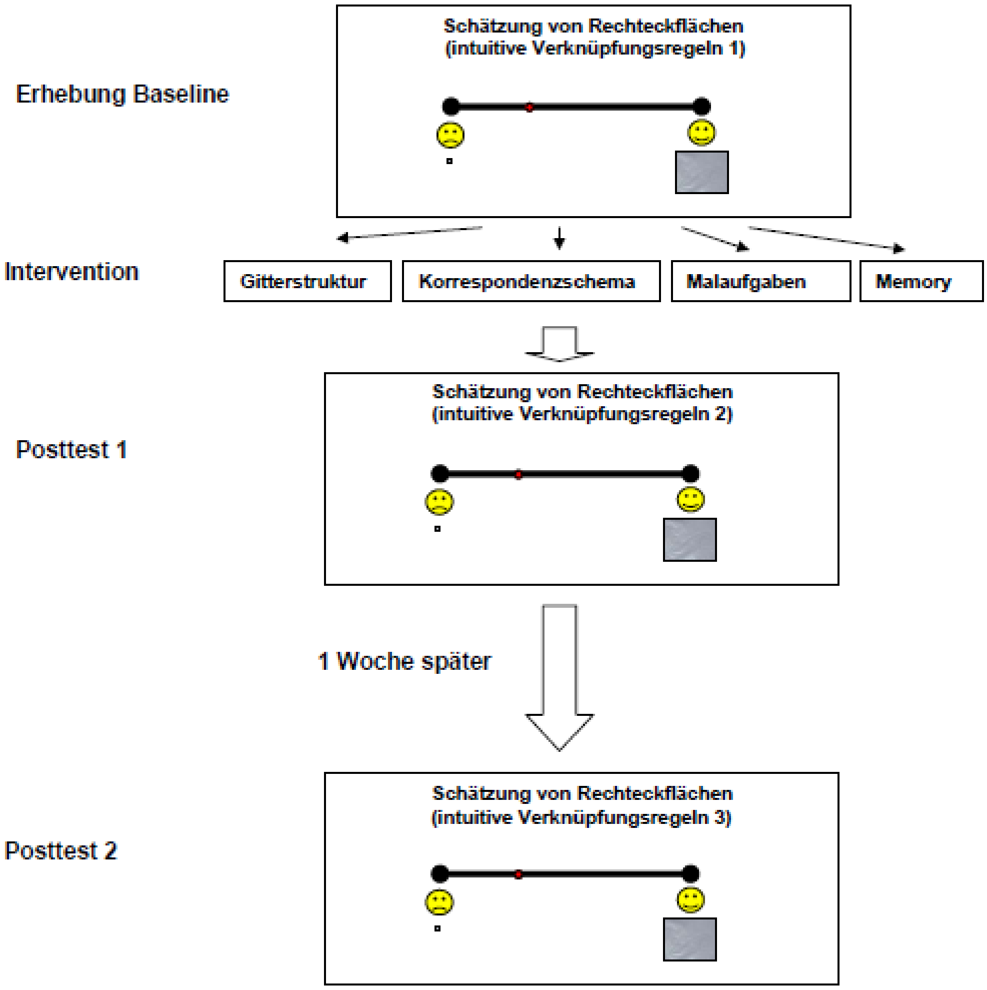


Abbildung 19. Graphische Darstellung des Versuchsplans.

4.2.3 Versuchsmaterial

Schätzung von Rechteckflächen

Im Unterschied zur ersten empirischen Untersuchung wurde diesmal zur Erhebung der intuitiven Verknüpfungsregeln ein 3x3-faktorielles (Länge x Breite) Design mit Messwiederholung verwendet. Das kleinere Design wurde aus Zeitgründen verwendet, denn die Untersuchungszeit durfte die maximale Konzentrationsspanne der Kinder nicht überschreiten. Die Längen und Breiten der Rechtecke waren jeweils 4 cm, 8 cm und 12 cm lang. Es ergaben sich somit 9 verschiedene Rechtecke, wobei jedes zweimal präsentiert wurde. Dementsprechend kleiner waren auch die Ankerstimuli für die Antwortskala. Der kleine Anker war 2 x 2 cm gross und der grosse 14 x 14 cm. Abbildung 20 zeigt die verschiedenen Kombinationen der Rechtecke. Für alle drei Erhebungen der intuitiven Verknüpfungsregeln wurden dieselben Stimuli in unterschiedlichen Reihenfolgen benutzt. Das Versuchsmaterial bestand wie in der ersten Untersuchung aus 8 mm dickem Holz. Die Flächen waren in Alufolie eingewickelt, damit sie aussahen wie Schokoladetafeln. Es gab zwei verschiedene Reihenfolgen für die Präsentation der Rechtecke.

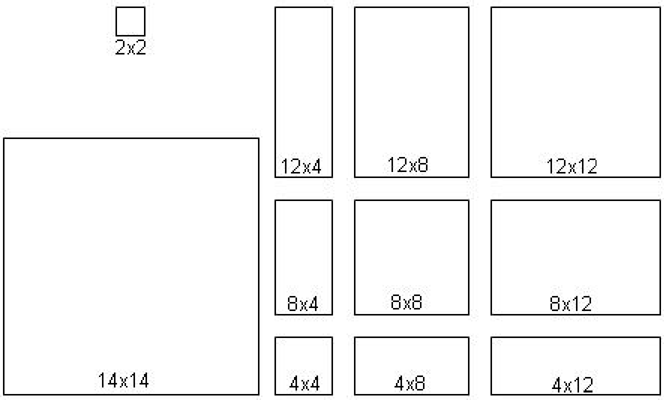


Abbildung 20. Länge und Breite der Rechteckflächen in cm.

Antwortskala. Es wurde dieselbe 100 cm lange Antwortskala wie in der ersten Untersuchung verwendet. Diese wird daher an dieser Stelle nicht nochmals beschrieben (siehe Kapitel 3.2.3). Der grosse Anker (14 x 14 cm) wurde neben dem lachenden Gesicht am Ende der Skala hingestellt, am Anfang der Skala, neben dem weinenden Gesicht, wurde der kleine Anker (2 x 2 cm) platziert.

Interventionen

Um zu gewährleisten, dass eine allfällige Veränderung der intuitiven Verknüpfungsregel auf die Intervention zurückzuführen ist, wurden vier verschiedene Interventionen durchgeführt. Diese dauerten jeweils 10 Minuten, die Versuchspersonen wurden zufällig auf eine der vier Übungseinheiten verteilt. Im Folgenden werden diese Interventionen genauer beschrieben.

Gitterstruktur. Diese Intervention wurde gewählt, um zu untersuchen, ob durch das Einzeichnen von kleinen Quadraten in einem Rechteck die visuelle Wahrnehmung der Fläche verbessert wird. Den Kindern wurde ein Arbeitsblatt präsentiert, auf welchem ein Rechteck mit den Massen 10 x 16 cm gezeichnet war. Sie wurden angeleitet, mit Bleistift und Lineal kleine Quadrate der Grösse 2 x 2 cm einzuzeichnen. Dazu wurden zuerst an der Länge und Breite des Rechtecks 2 cm grosse Abschnitte abgemessen und eingezeichnet. In einem weiteren Schritt wurden diese Punkte mit Linien verbunden, damit eine Gitterstruktur zu sehen war. Die Kinder wurden gefragt, wie viele kleine Quadrate in dem Rechteck eingezeichnet waren. Dabei wurde notiert, ob sie diese einzeln zählten, die Reihen addierten oder die Quadrate der Länge und Breite zählten und diese dann miteinander multiplizierten. Wurde die Anzahl kleiner Quadrate nicht multiplikativ berechnet, wurden die Kinder gefragt, welches die schnellste Strategie sei, um die Quadrate zu zählen. Falls die Kinder nicht von selber herausfanden, dass man diese multiplizieren kann, wurde ihnen dies erklärt und die Rechnung wurde zusammen erarbeitet. Falls noch Zeit übrig blieb, wurde die gleiche Aufgabe mit einem weiteren Rechteck mit den Massen 8 x 12 cm gestellt (siehe Anhang 4).

Korrespondenzschema. Bei dieser Intervention wurden mit den Kindern insgesamt neun Multiplikationsaufgaben gelöst, in welchen jeweils eine Beziehung zwischen zwei Zahlen erkannt werden musste. Die Aufgaben wurden mit aufsteigender Schwierigkeit gelöst. Die ersten drei waren mit Bildern dargestellt, wobei die ersten beiden Problemstellungen identisch mit denjenigen aus der ersten Untersuchung waren und die dritte Aufgabe nur bildhaft, ohne Text, gezeigt wurde. Die Aufgaben vier bis neun waren Satzaufgaben. Bei diesen musste die *one-to-many-correspondence* aus dem Text erkannt werden. Die Aufgaben vier bis sechs waren einfacher auf dem funktionalen Weg zu lösen, da sie eine *one-to-many-correspondence* enthielten. Die Aufgaben sieben bis neun bestanden aus den

Verhältnissen 2:5, 3:5 und 2:3. Entweder musste bei diesen Aufgaben zuerst die *one-to-many-correspondence* ausgerechnet werden, was für die Kinder jedoch schwierig war, da dies eine Bruchzahl ergab, oder sie mussten auf dem skalaren Weg ausgerechnet werden. Falls noch Zeit übrigblieb, wurden die Kinder dazu angehalten, eine eigene Aufgabe aufzuschreiben oder zu zeichnen. Bei allen Korrespondenzschema-Aufgaben mussten die Informationen aus den Satzaufgaben in eine mathematisch-symbolische Form abstrahiert werden, was von der Versuchsleiterin vorgezeigt wurde. Es wurde jeweils protokolliert, bei welchen Aufgaben Hilfestellungen gegeben wurden und welche selbständig gelöst werden konnten (siehe Anhang 5).

Malaufgaben finden. Bei diesem Aufgabentyp zeigten sich in der ersten Untersuchung zwischen den Kindern, welche bei der Schätzung der Rechteckflächen eine additive Verknüpfungsregel anwandten, und denen, die eine multiplikative Verknüpfungsregel benutzten, keine signifikanten Unterschiede. Diese Aufgaben wurden daher für die „neutrale" Intervention verwendet, denn es wurde erwartet, dass durch sie keine Veränderung der intuitiven Verknüpfungsregeln entsteht. Den Schülerinnen und Schülern wurden zehn Ergebnisse präsentiert und sie mussten je zwei verschiedene Einmaleins-aufgaben dazu suchen. Die Kinder wurden angehalten, zwei unterschiedliche Aufgaben zu suchen und keine Umkehraufgaben (2 x 10 bzw. 10 x 2) hinzuschreiben. Auffälligkeiten beim Bearbeiten dieser Aufgaben wurden protokolliert (siehe Anhang 6).

Memory. Die vierte Intervention war die Kontrollbedingung. Mit den Kindern dieser Gruppe wurde 10 Minuten lang ein Memory mit Comic-Figuren gespielt.

4.2.4 Versuchsdurchführung

Die zweite empirische Untersuchung fand zu zwei verschiedenen Zeitpunkten statt, wobei die zweite Sitzung jeweils genau eine Woche nach der ersten erfolgte. Zum ersten Untersuchungszeitpunkt wurden die intuitiven Verknüpfungsregeln erhoben (Baseline) und nach einer 10-minütigen Intervention wurde das intuitive Muster ein weiteres Mal ermittelt (Posttest 1). Diese drei Schritte dauerten insgesamt ca. 30 Minuten pro Kind. Eine Woche später fand die Nachuntersuchung der intuitiven Verknüpfungsregeln statt (Posttest 2), welche ca. 10 Minuten dauerte. Die Kinder wurden in einem separaten Raum einzeln untersucht, wobei sich die Versuchsleiterin und das Kind an einem Tisch gegenübersassen. Im Folgenden werden die vier Schritte genauer beschrieben.

1. Schritt: Erhebung der Baseline

Zuerst wurde mit den Kindern das Experiment zur Schätzung der Rechteckflächen durchgeführt, wobei dieses im Vergleich zur ersten empirischen Untersuchung kürzer ausfiel. Den Kindern wurden neun verschiedene Rechteckflächen präsentiert, jede musste zweimal auf der Skala geschätzt werden. Pro Kind dauerte dies ca. 10 Minuten. Die Instruktion sowie der Ablauf dieses Experiments waren dieselben wie in der ersten Untersuchung und werden daher an dieser Stelle nicht nochmals erläutert (siehe Kapitel 3.2.5).

2. Schritt: Intervention

Danach folgte eine der vier Interventionen, welche zufällig auf die Kinder verteilt wurden und jeweils genau 10 Minuten dauerten. In dieser Zeit wurde darauf geachtet, dass das Kind intensiv mitarbeitete und mitdachte. Die sprachlichen Anweisungen waren stufengerecht formuliert, die Aufgaben wurden gemeinsam erarbeitet. Der Klasse wurde vorgängig mitgeteilt, dass nicht alle Kinder die gleichen Übungseinheiten haben würden; am Ende der Untersuchung, nach dem Posttest 2, zeigte die Versuchsleiterin der ganzen Klasse alle vier Interventionen.

3. Schritt: Posttest 1

Nach der Intervention folgte erneut das Schätzen der 18 Rechteckflächen. Dieses Mal wurde nicht nochmals die ganze Erklärung gegeben, sondern die Kinder wurden angehalten, in eigenen Worten zu erklären, was sie beim ersten Mal gemacht hatten. War dies richtig, wurden die Rechteckflächen geschätzt. Ansonsten wurde ihnen der Ablauf nochmals erklärt. Es wurden wieder die gleichen Stimuli verwendet, da davon ausgegangen wurde, dass es nicht möglich ist, sich die geschätzte Position der 18 Flächen auf der Skala zu merken, zumal sich auf dieser keine cm-Angaben befanden. Ausserdem wurden die Kinder gebeten, ihre Urteile sehr schnell abzugeben, da eine spontane intuitive Schätzung erwünscht war. Es war somit nicht möglich etwas abzumessen oder zu berechnen.

4. Schritt: Posttest 2

Genau eine Woche später wurde die Aufgabe zur Schätzung der Rechteckflächen ein drittes Mal durchgeführt, um zu sehen, ob ein allfälliger Effekt der Intervention beständig und somit das neu erworbene Wissen stabil sei. Wieder wurden die Kinder gefragt, ob sie sich noch erinnerten, was sie letztes Mal gemacht hatten, und sie wurden gebeten, dies der Versuchsleiterin in eigenen Worten zu erklären. Danach wurde nachgefragt, welche Aufgabe sie als Intervention gemacht hatten. Die meisten Kinder konnten sich noch an alles erinnern. Dieser Posttest wurde eine Woche später durchgeführt, damit Faktoren, welche eine Veränderung der Verknüpfungsregel beeinflussen könnten (z.B. schulischer Unterricht, Erfahrungen im alltäglichen Leben, Alterseffekt) möglichst ausgeschlossen werden konnten.

4.3 Resultate

Ziel dieses zweiten Experimentes war es, herauszufinden, ob aufgrund einer 10-minütigen Intervention eine Veränderung der intuitiven Verknüpfungsregeln möglich und ob eine allfällige Veränderung stabil ist. Die Resultate sind in drei Teile aufgegliedert: Im ersten Teil werden die intuitiven Verknüpfungsregeln und deren Verteilung zu allen drei Messzeitpunkten dargestellt, im zweiten Teil wird auf die Veränderung der intuitiven Regeln aufgrund der Intervention eingegangen, und der letzte Teil befasst sich mit der Stabilität der intuitiven Verknüpfungsregeln. Da die intuitiven Integrationsregeln insgesamt dreimal erhoben wurden, werden sie zur besseren Unterscheidung im Folgenden jeweils mit Baseline (vor der Intervention), Posttest 1 (nach der Intervention) und Posttest 2 (1 Woche nach der Intervention) beschrieben.

4.3.1 Erhebung der intuitiven Verknüpfungsregeln

Wie in der ersten empirischen Untersuchung wurden für die Analyse der intuitiven Verknüpfungsregeln varianzanalytische Verfahren (ANOVA) benutzt. Dabei waren die Faktoren die Länge und die Breite (je 3 Stufen) und die abhängige Variable die Urteile der Kinder auf der Antwortskala. Aufgrund der genauen Prüfung der Effekte von Länge, Breite und deren Verknüpfung sowie der dazugehörigen Graphiken wurden die Kinder in die drei Gruppen additive Verknüpfungsregel (Länge + Breite), multiplikative Verknüpfungsregel (Länge x Breite) und keine Regel eingeteilt. Da dieses Vorgehen bereits vorgängig ausführlich erklärt wurde (siehe Kapitel 3.3.1), wird an dieser Stelle nicht nochmals darauf eingegangen.

Informationsintegration: Gruppenanalysen

Erhebung Baseline. Eine ANOVA mit Messwiederholung für die gesamte Gruppe der Kinder zeigte einen signifikanten Effekt der Länge, $F(2, 21) = 968.77$, $p < .001$, $\eta^2 = .904$, der Breite, $F(2, 206) = 1151.58$, $p < .001$, $\eta^2 = .918$ sowie deren Interaktion, $F(4, 412) = 25.34$, $p < .001$, $\eta^2 = .197$. Die graphische Darstellung der durchschnittlichen Schätzwerte, wobei die Längen auf der horizontalen Achse dargestellt wurden und die Kurven die Breiten zeigten, ergab ein Fächermuster (Abbildung 21). Daher kann insgesamt, über die gesamte Altersgruppe gerechnet, von einer multiplikativen Verknüpfung der Stimulus-dimensionen ausgegangen werden.

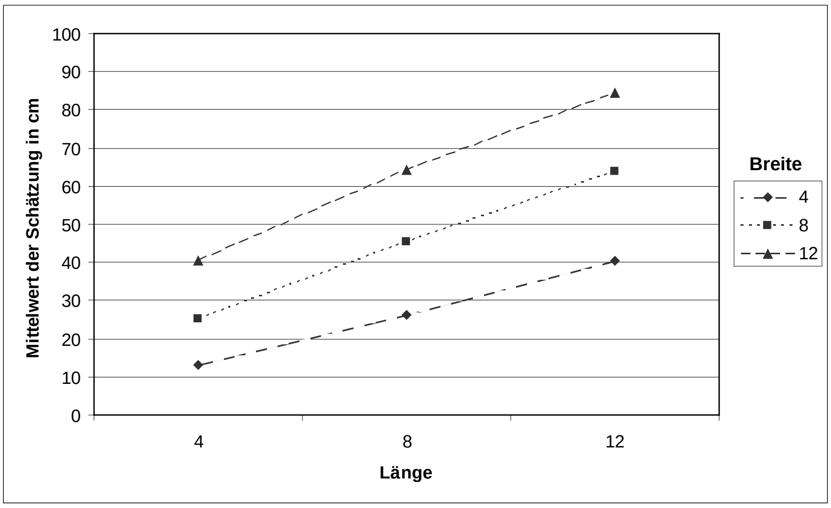


Abbildung 21. Durchschnittliche Schätzwerte der Rechteckflächen für die gesamte Stichprobe der Baseline-Erhebung.

Die Reihenfolge der präsentierten Rechtecke hatte keinen signifikanten Effekt auf die intuitiven Schätzungen der Kinder, $F(1, 60) = 2.86$, $p = .09$, $\eta^2 = .027$. Weitere ANOVAs mit den Between-subject-Faktoren „Geschlecht“, „Schulklasse“ und „Versuchsleiterin“ ergaben ebenfalls keine signifikanten Effekte, [$F(1, 60) = .29$, $p = .60$, $\eta^2 = .005$, $F(6, 60) = 2.06$, $p = .07$, $\eta^2 = .171$, $F(2, 60) = 1.04$, $p = .36$, $\eta^2 = .043$].

Erhebung Posttest 1. Um die Integrationsregel der gesamten Altersgruppe nach der Intervention zu analysieren, wurde eine weitere ANOVA mit Messwiederholung gerechnet. Dabei zeigte sich ein signifikanter Haupteffekt der Länge und der Breite sowie eine Interaktion dieser beiden Faktoren, [$F(2, 206) = 1284$, $p < .001$, $\eta^2 = .926$, $F(2, 206) = 1381.02$, $p < .001$, $\eta^2 = .931$, $F(4, 412) = 38.65$, $p < .001$, $\eta^2 = .273$]. Die graphische Darstellung der durchschnittlichen Schätzwerte aller Versuchspersonen mit der Länge auf der horizontalen Achse und den Breiten als Antwortkurven zeigte ein aufgefächertes Muster (Abbildung 22). Somit kann auch nach der Intervention von einem multiplikativen Muster der gesamten Altersgruppe ausgegangen werden.

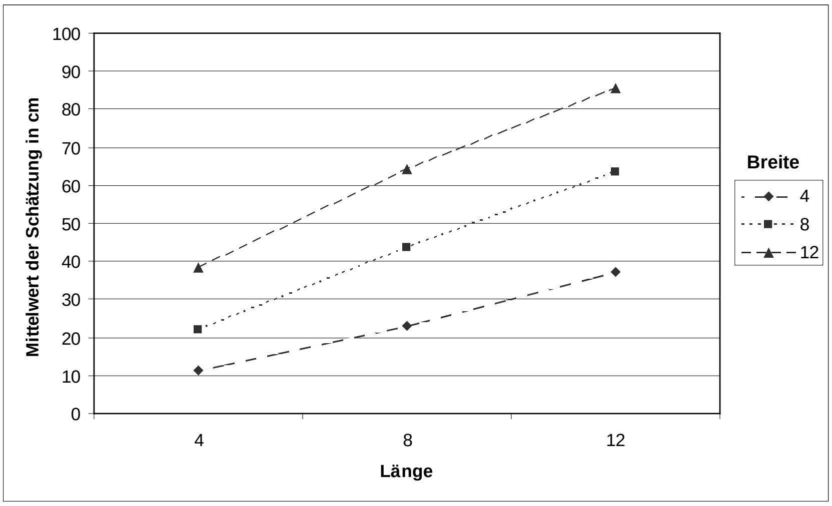


Abbildung 22. Durchschnittliche Schätzwerte der Rechteckflächen für die gesamte Stichprobe vor der Intervention.

Eine Überprüfung der Between-subject-Faktoren „Geschlecht“, „Schulklasse“ und „Versuchsleiterin“ zeigte keinen signifikanten Effekt, [$F(1, 57) = .09$, $p = .77$, $\eta^2 = .002$, $F(6, 57) = 2.03$, $p =. 08$, $\eta^2 = .176$, $F(2, 57) = .60$, $p = .55$, $\eta^2 = .021$] und auch die Reihenfolge, in der die Rechtecke präsentiert wurden, hatte keinen signifikanten Einfluss auf die Schätzungen der Kinder, $F(1, 57) = .42$, $p = .52$, $\eta^2 = .007$.

Erhebung Posttest 2. Eine ANOVA mit Messwiederholung für die gesamte Gruppe der Kinder eine Woche nach der Intervention zeigte ebenfalls einen signifikanten Haupteffekte für die Länge, $F(2, 202) = 1245.85$, $p < .001$, $\eta^2 = .925$, die Breite, $F(2, 202) = 1446.35$, $p < .001$, $\eta^2 = .935$, sowie die Interaktion dieser beiden Faktoren, $F(4, 404) = 47.83$, $p < .001$, $\eta^2 = .321$. Die graphische Darstellung der Schätzwerte mit den Längen auf der horizontalen Achse und den Breiten als Antwortkurven bestätigte, dass eine multiplikative Verknüpfung der beiden Stimulusdimensionen vorgenommen wurde (Abbildung 23).

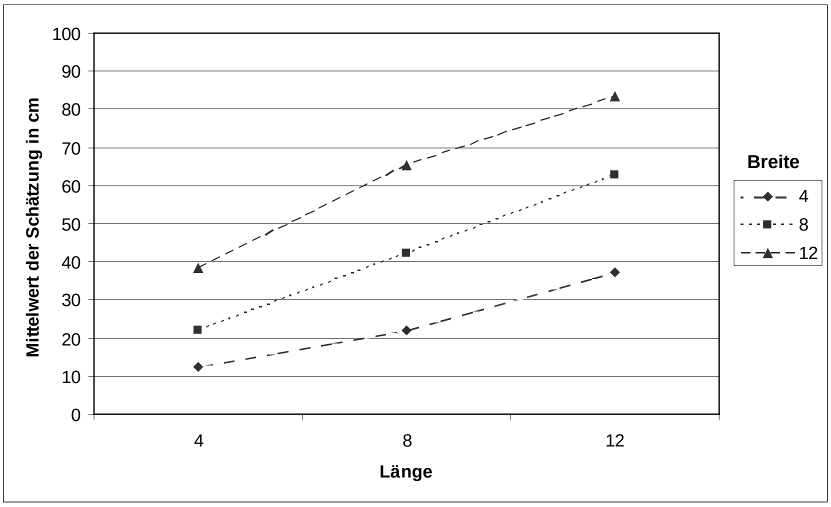


Abbildung 23. Durchschnittliche Schätzwerte der Rechteckflächen für die gesamte Stichprobe nach der Intervention.

Die Überprüfung der Between-subject-Faktoren mit weiteren ANOVAs zeigte, dass weder das Geschlecht, $F(1, 57) = .34$, $p = .56$, $\eta^2 = .006$, noch die Schulklasse, $F(6, 57) = 1.24$, $p = .30$, $\eta^2 = .116$, noch die Versuchsleiterin ($F(2, 57) = .76$, $p = .47$, $\eta^2 = .026$, oder die Reihenfolge der präsentierten Rechtecke, $F(1, 57) = .03$, $p = .86$, $\eta^2 = .001$, einen signifikanten Effekt ergab.

Konsistenzanalyse. Da für jedes Rechteck zweimal eine intuitive Schätzung abgegeben wurde und die intuitiven Regeln aufgrund des Mittelwertes aus den beiden Schätzungen berechnet wurden, musste geprüft werden, ob sich diese beiden Urteile ähnlich waren. Würde die Pearson-Korrelation einen niedrigen Wert zeigen, wären die Daten nur bedingt interpretierbar, da dies bedeuten würde, dass die Mittelwerte aus zwei Schätzungen entstanden, welche sich nicht ähnlich waren. Tabelle 7 zeigt die Korrelationen der Rechtecke bei allen drei Erhebungen.

Tabelle 7

Pearson Korrelationen sowie Signifikanzwerte der Messwiederholungsdaten (in Klammer)

	Erhebung		
Rechteckgrösse	**Baseline (*N* = 104)**	**Posttest 1 (*N* = 104)**	**Posttest 2 (*N* = 102)**
4 x 4	.64 (***)	.72 (***)	.67 (***)
4 x 8	.43 (***)	.58 (***)	.66 (***)
4 x 12	.64 (***)	.66 (***)	.66 (***)
8 x 4	.46 (***)	.60 (***)	.61 (***)
8 x 8	.45 (***)	.53 (***)	.42 (***)
8 x 12	.53 (***)	.38 (***)	.42 (***)
12 x 4	.41 (***)	.65 (***)	.62 (***)
12 x 8	.62 (***)	.62 (***)	.65 (***)
12 x 12	.79 (***)	.68 (***)	.54 (***)
Total	.55 (***)	.60 (***)	.58 (***)

Anmerkung: *** = $p < .001$

Die hoch signifikanten Korrelationen zeigen, dass sich die beiden Schätzungen der präsentierten Rechtecke ähnlich waren. Die mittlere Konsistenz lag zwischen r = .55 und r = .60, wobei die Korrelationen vom Posttest 1 am höchsten waren.

Informationsintegration: Einzelanalysen

Für die Analyse der Verknüpfungsregeln auf der Individualebene wurde für jede Versuchsperson eine ANOVA gerechnet. Aufgrund dieser Resultate wurde jedes Kind einer Verknüpfungsregel (additiv, multiplikativ, keine Regel) zugeteilt. Die Zuteilung zu den intuitiven Verknüpfungsregeln wurden mit derjenigen eines Experten verglichen und die Interraterreliabilität berechnet, (Baseline: Cohen’s Kappa = .88, Posttest 1: Cohen’s Kappa = .88, Posttest 2: Cohen’s Kappa = .90).

Abbildung 24 zeigt die Verteilung der intuitiven Verknüpfungsregeln aller drei Erhebungen. Bei der Baseline-Erhebung am ersten Untersuchungstag konnten 4 Kinder (3.8%) keiner Regel zugeteilt werden, 79 Kinder (76%) verknüpften die Länge und Breite additiv und 21 Kinder (20.2%) machten ihre Schätzungen gemäss der korrekten multiplikativen Regel. Nach der Intervention (Posttest 1) waren es immer noch 4 Kinder (3.8%), bei welchen keine einheitliche Strategie gefunden werden konnte, 60 Kinder

(57.7%) verknüpften die Länge und die Breite mit einer additiven Regel und bei 40 Kindern (38.5%) zeigte sich ein multiplikatives Muster.

Am zweiten Untersuchungstag, eine Woche später, konnten zwei Mädchen aus Krankheitsgründen nicht teilnehmen. Eins davon wandte bei der Baseline-Erhebung eine additive, das andere Mädchen eine multiplikative Verknüpfungsregel an. Die Auswertungen des Posttests 2 beziehen sich daher auf 102 Kinder. Bei dieser Erhebung konnte nur noch bei 2 Kindern (2%) keine Strategie gefunden werden, 57 Kinder (55.9%) antworteten gemäss der additiven Verknüpfungsregel und 43 Kinder (42.1%) bildeten bei ihrer intuitiven Schätzung der Länge und Breite das Produkt.

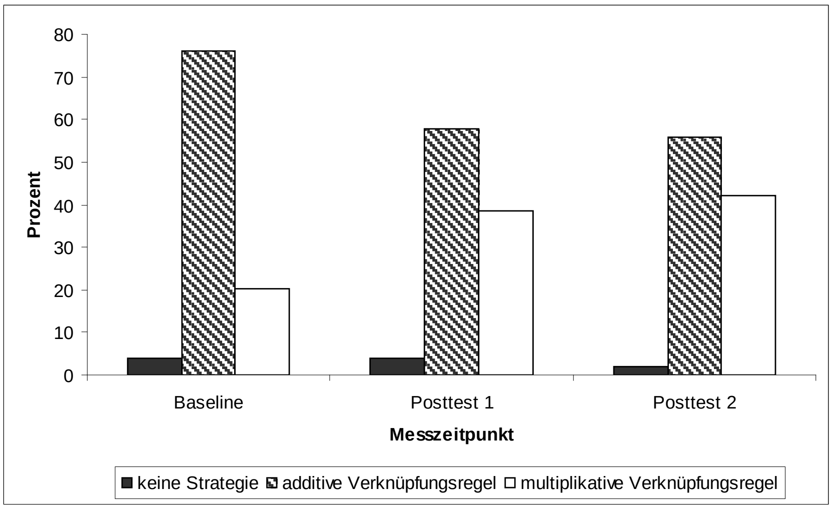


Abbildung 24. Prozentuale Verteilung der intuitiven Verknüpfungsregeln aus allen 3 Erhebungen.

4.3.2 Regeländerungen aufgrund der Intervention

Die untersuchten Kinder wurden gleichmässig auf die vier Interventionen verteilt. Von den 102 Kindern, welche an beiden Untersuchungstagen teilnahmen, wurde mit 25 Kindern (24.5%) die Gitterstruktur in einem Rechteck konstruiert, mit 27 Kindern (26.5%) wurden Aufgaben zum Korrespondenzschema bearbeitet, 26 Kinder (25.5%) versuchten Malaufgaben herauszufinden, und mit den 24 Kindern der Kontrollgruppe (23.5%) wurde Memory gespielt. Für die folgenden Auswertungen wurden die Kinder aufgrund ihrer intuitiven Verknüpfungsregel in der Baseline-Erhebung aufgeteilt.

Gruppe ohne Strategie in der Baseline-Erhebung

Von den vier Kindern, welche keiner Regel zugeteilt werden konnten, wechselte beim Posttest 1 nur ein Kind zu einer additiven Verknüpfungsregel (Interventionsgruppe Malaufgaben). Bei den anderen Kindern konnte aufgrund ihrer intuitiven Schätzungen auch nach der Intervention keine Strategie gefunden werden.

Gruppe mit der additiven Verknüpfungsregel

Für die Fragestellung dieser Untersuchung, ob sich die intuitiven Verknüpfungsregeln aufgrund einer Intervention verändern, war die Gruppe mit der additiven Verknüpfungsregel die interessanteste. Würde bei dieser Gruppe die intuitive Regel, welche in der Baseline erhoben wurde, zur multiplikativen Regel verändert werden, würde dies bedeuten, dass die Intervention erfolgreich gewesen ist. Tabelle 8 zeigt, dass nach der Intervention 24 Kinder (30.8%) ihre intuitive Verknüpfungsregel änderten, während 53 Kinder (67.9%) ihre Antwortstrategie beibehielten. Ein Kind konnte nach der Intervention keiner intuitiven Verknüpfungsregel mehr zugeteilt werden.

Tabelle 8

Posttest 1: Regeländerung von Kindern, welche in der Baseline-Erhebung der Gruppe mit einer additiven Verknüpfungsregel zugeteilt wurden, aufgeteilt nach Intervention, in Anzahl Versuchspersonen und in gerundeten Prozenten (Klammer)

	Posttest 1, intuitive Verknüpfungsregel nach der Intervention		
Intervention	**keine**	**additiv**	**multiplikativ**
Fläche (*n* = 22)	1 (1)	16 (20)	5 (6)
Korrespondenzschema (*n* = 19)	-	13 (17)	6 (8)
Malaufgaben (*n* = 21)	-	14 (18)	7 (9)
Memory (*n* = 16)	-	10 (13)	6 (8)
Total (*n* = 78)	1 (1)	53 (68)	24 (31)
Regeländerung	Verschlechterung	stabil	Verbesserung

In Abbildung 25 wird dies nochmals verdeutlicht. Von den 24 Kindern, welche nach der Intervention ihr intuitives Muster von einer vereinfachten additiven Strategie zur multiplikativen änderten, hatten 5 Kinder (20.8%) die Fläche als Interventionsbedingung, 6 Kinder (25%) bearbeiteten die Aufgaben zum Korrespondenzschema, 7 Kinder (29.2%) lösten Malaufgaben und 6 Kinder (25%) gehörten zur Kontrollgruppe. Die Verbesserung der intuitiven Verknüpfungsregeln teilte sich somit gleichmässig auf die drei

Interventionsbedingungen auf. Die Tatsache, dass sogar Kinder aus der Kontrollgruppe, mit welcher Memory gespielt wurde, ihre Verknüpfungsregel verbesserten, zeigt, dass die Intervention keinen Einfluss auf die Regeländerung hatte. Ein nicht signifikanter χ^2-Test bestätigte dieses Resultat, $\chi^2(3, N = 24) = .33, p = .95$; die Gruppe der Kinder, welche nach der Intervention zur multiplikativen Strategie wechselte, tat dies unabhängig von der Interventionsbedingung.

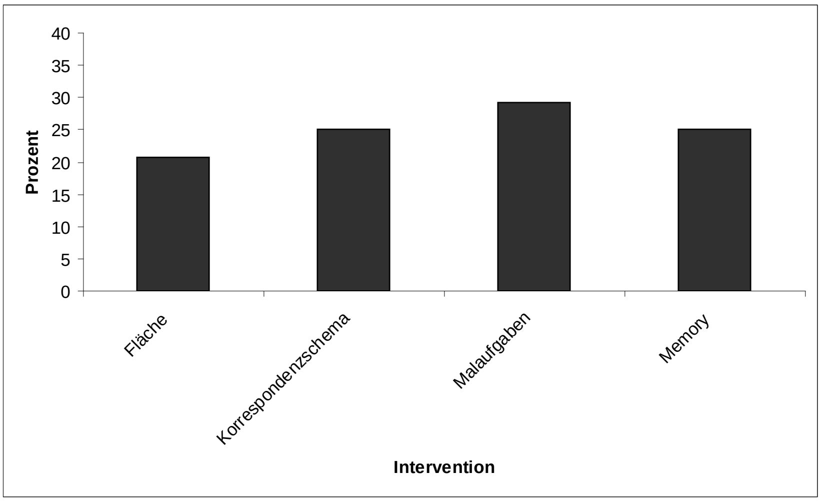


Abbildung 25. Gruppe der Kinder mit einer additiven Verknüpfungsstrategie, welche nach der Intervention ihr intuitives Muster verbesserte, aufgeteilt nach Intervention.

Gruppe mit der multiplikativen Verknüpfungsregel

Von der Gruppe mit einer multiplikativen Integrationsregel vereinfachten nach der Intervention 5 Kinder (25%) ihre Antwortstrategie, indem sie die Länge und Breite addierten statt zu multiplizieren. Diese Vereinfachungsstrategie kam in jeder Interventionsbedingung vor. Bei 15 Kindern (75%) konnte in der zweiten Erhebung der intuitiven Verknüpfungsregeln im Posttest 1 immer noch eine multiplikative Verknüpfung gefunden werden; sie behielten ihre Strategie nach der Intervention stabil bei. Die Resultate dieser Gruppe weisen ebenfalls darauf hin, dass eine Veränderung der intuitiven Verknüpfungsregel unabhängig von der Intervention erfolgte. In Tabelle 9 sind die Regeländerungen ersichtlich.

Tabelle 9

Posttest 1: Regeländerung von Kindern, welche in der Baseline-Erhebung der Gruppe mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel zugeteilt wurden, aufgeteilt nach Intervention, in Anzahl Versuchspersonen und in Prozenten (Klammer)

	Posttest 1, intuitive Verknüpfungsregel nach der Intervention	
Intervention	**additiv**	**multiplikativ**
Fläche (*n* = 2)	1 (5)	1 (5)
Proportionen (*n* = 6)	1 (5)	5 (25)
Malaufgaben (*n* = 4)	1 (5)	3 (15)
Memory (*n* = 8)	2 (10)	6 (30)
Total (*n* = 20)	5 (25)	15 (75)
Regeländerung	Verschlechterung	stabil

4.3.3 Stabilität der Verknüpfungsregeländerung

Konsistenzanalyse

Mit einer Konsistenzanalyse wurden die Mittelwerte der Rechteckflächenschätzungen der drei Erhebungen miteinander verglichen. Es zeigte sich (Tabelle 10), dass diese durchschnittlichen Schätzwerte vor und nach der Intervention (Baseline und Posttest 1) hoch signifikant miteinander korrelierten. Diese beiden Schätzwerte korrelierten jedoch nicht mit denjenigen des Posttests 2.

Tabelle 10

Pearson Korrelationen der Mittelwerte der drei Erhebungen sowie Signifikanzwerte (in Klammer)

		Erhebung	
Rechteckgrösse	**Baseline / Posttest 1**	**Baseline / Posttest 2**	**Posttest 1 / Posttest 2**
4 x 4	.58 (***)	-.13 (-)	-.12 (-)
4 x 8	.6 (***)	-.15 (-)	-.17 (-)
4 x 12	.67 (***)	-.07 (-)	-.02 (-)
8 x 4	.68 (***)	-.11 (-)	-.27 (**)
8 x 8	.46 (***)	.02 (-)	.07 (-)
8 x 12	.52 (***)	.03 (-)	.13 (-)
12 x 4	.47 (***)	.13 (-)	-.04 (-)
12 x 8	.62 (***)	.1 (-)	.14 (-)
12 x 12	.64 (***)	.12 (-)	.13 (-)
Total	0.58 (***)	-0.01 (-)	-0.02 (-)

Anmerkung: $p < .05$ = *, $p < .01$ = **, $p < .001$ = ***

Verteilungen der intuitiven Verknüpfungsregeln

Im Balkendiagramm der Abbildung 24 wurde bereits die Verteilung der intuitiven Verknüpfungsregeln aller drei Erhebungen aufgezeigt. In der Verteilung der Baseline zeigte sich ein höherer Anteil Kinder mit einer additiven Verknüpfungsregel und dementsprechend weniger Kinder mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel als in der Verteilung des Posttests 1. Die Verteilung des Posttests 2 ist praktisch gleich wie diejenige des Posttests 1.

Mit einem χ^2-Test wurden diese drei Verteilungen miteinander verglichen. Die beobachtete Verteilung aus der ersten Erhebung (Baseline) unterschied sich signifikant von derjenigen nach der Intervention, $\chi^2(2, N = 104) = 21.76$, $p < .001$, und von der des Posttests 2, $\chi^2(2, N = 104) = 30.73$, $p < .001$. Die beobachtete Verteilung des Posttests 1 wich hingegen nicht signifikant von derjenigen des Posttests 2 ab, $\chi^2(2, N = 102) = 1.36$, $p = .51$. Aufgrund des Vergleichs dieser Verteilungen scheint es, als hätten einige Kinder ihre Verknüpfungsstrategie nach der Intervention verändert und die neue Strategie beim Posttest 2 beibehalten.

Regeländerung der einzelnen Kinder

Um die Stabilität der Regeländerungen zu untersuchen, wurden die Änderungen der intuitiven Verknüpfungsregeln der einzelnen Kinder von der Baseline-Einteilung zum Posttest 1 sowie von der Baseline-Einteilung zum Posttest 2 genauer angeschaut. In Tabelle 11 sind diese Veränderungen dargestellt.

Auch hier scheint es, dass zwischen dem Posttest 1 und dem Posttest 2 keine grossen Änderungen der intuitiven Verknüpfungsregeln stattfanden. Im Vergleich zum Posttest 1 gab es im Posttest 2 ein Kind weniger, das keiner Regel zugeteilt werden konnte. Aus der additiven Regelgruppe in der der Baseline-Erhebung wechselten 24 Kinder (30.4%) im Posttest 1 zur multiplikativen Regel und 25 Kinder (32.1%) taten dies im Posttest 2. Von den Kindern mit einer multiplikativen Regel in der Baseline-Erhebung wendeten 5 Kinder (23.8%) im Posttest 1 eine additive Verknüpfungsregel an, im Posttest 2 waren es nur noch 2 Kinder (10%), die ihre intuitive Integrationsregel vereinfachten.

Tabelle 11

Regeländerung von der Baseline Einteilung zum Posttest 1 und von der Baseline Einteilung zum Posttest 2, in Anzahl Versuchspersonen und in gerundeten Prozenten (Klammer)

	intuitive Verknüpfungsregel Posttest 1 (*N* = 104)			**intuitive Verknüpfungsregel Posttest 2 (*N* = 102)**		
Verknüpfungs-regel Baseline (*N* = 104)	**keine (*n* = 4)**	**additiv (*n* = 60)**	**multiplikativ (*n* = 40)**	**keine (*n* = 2)**	**additiv (*n* = 57)**	**multiplikativ (*n* = 43)**
keine (*n* = 4)	3 (75)	1 (25)	-	2 (50)	2 (50)	-
additiv (*n* = 79)	1 (1)	54 (69)	24 (30)	-	53 (68)	25 (32)
multiplikativ (*n* = 21)	-	5 (24)	16 (76)	-	2 (10)	18 (90)

Anmerkung: Ein Kind mit einer additiven Verknüpfungsregel und ein Kind mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel in der Baseline-Erhebung konnten am Posttest 2 aus Krankheitsgründen nicht teilnehmen.

Der Vergleich zwischen Posttest 1 und Posttest 2 zeigte jedoch ein anderes Bild dieses ersten Eindrucks (Tabelle 12). Innerhalb einer Woche änderte ein grosser Teil der Kinder die Verknüpfungsregel. Von den 59 Kindern mit einer additiven Verknüpfungsregel im Posttest 1 wechselten 16 Kinder (27.1%) zur multiplikativen Regel, während 42 Kinder (71.2%) die additive Regel weiterhin anwendete. Aus der Gruppe mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel im Posttest 1 benutzten 12 Kinder (30.8%) im Posttest 2 eine additive Regel und 27 Kinder (69.2%) verwendeten weiterhin die multiplikative Regel für die Schätzung der Rechteckflächen.

Tabelle 12

Regeländerung zwischen Posttest 1 und Posttest 2 in Anzahl Versuchspersonen und in gerundeten Prozenten (Klammer)

	Posttest 2: intuitive Verknüpfungsregel			
Posttest 1: intuitive Verknüpfungsregel	**keine (*n* = 2)**	**additiv (*n* = 57)**	**multiplikativ (*n* = 43)**	**Total (*n* = 102)**
keine (*n* = 4)	1 (25)	3 (75)	-	4 (100)
additiv (*n* = 59)	1 (2)	42 (71)	16 (27)	59 (100)
multiplikativ (*n* = 39)	-	12 (31)	27 (69)	39 (100)

Zwischen Posttest 1 und Posttest 2 wurden somit die intuitiven Verknüpfungsregeln nochmals verändert. Zwar blieben die Verteilungen insgesamt gleich, sie setzten sich jedoch nicht aus denselben Versuchspersonen zusammen. Abbildung 26 zeigt die Regeländerungen der einzelnen Kinder während der drei Erhebungen. Kinder, welche in der Baseline-Erhebung keiner Verknüpfungsstrategie zugeteilt werden konnten, wurden weggelassen, daher bezieht sich diese Auswertung auf 97 Versuchspersonen.

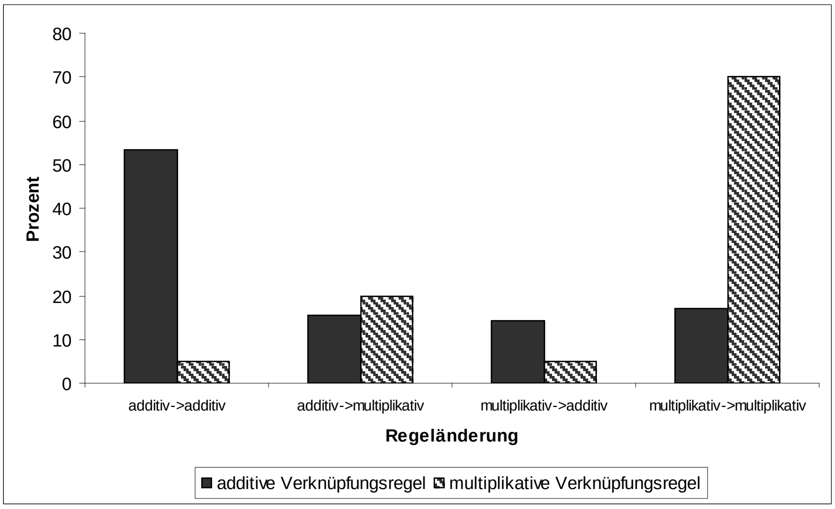


Abbildung 26. Intuitive Verknüpfungsregeln der Baseline-Erhebung. Auf der horizontalen Achse ist die Veränderung vom Posttest 1 zum Posttest 2 dargestellt.

Von den 77 Kindern mit einer additiven Verknüpfungsstrategie in der Baseline-Erhebung wechselten 13 Kinder (16.9%) im Posttest 1 zu einer multiplikativen Verknüpfungsregel und behielten diese auch im Posttest 2 bei. Weitere 12 Kinder (15.6%) behielten im Posttest 1 ihre additive Strategie bei und wechselten im Posttest 2 zu einer multiplikativen Verknüpfungsregel. Während 41 Kinder (53.2%) ihre additive Regel zu allen Messzeitpunkten beibehielten, wechselten 11 Kinder (14.3%) nur im Posttest 1 zu einer multiplikativen Verknüpfungsregel und im Posttest 2 wieder zur additiven Regel. Von den 24 Kindern, welche nach der Intervention ihr intuitives Muster zur normativen Verknüpfungsregel änderten, konnten somit nur 13 (54.2%) dieses auch eine Woche später noch beibehalten, während 11 (45.8%) wieder auf die ursprüngliche additive Regel zurückfielen.

Von den 20 Kindern mit einer multiplikativen Verknüpfung der Länge und Breite bei der Flächenschätzung in der Baseline-Erhebung behielten 14 Kinder (70%) zu allen Messzeitpunkten dieselbe Regel bei. Weitere 4 Kinder (20%) benutzten im Posttest 1 eine additive Verknüpfungsstrategie und im Posttest 2 wieder eine multiplikative. Ein Kind (5%) benutzte nur in der Baseline-Erhebung eine multiplikative Regel und im Posttest 1 und 2 jeweils die additive Regel. Ein weiteres Kind (5%) benutzte in der Baseline und im Posttest 1 eine multiplikative Regel und beim Posttest 2 eine additive Verknüpfungsstrategie.

4.4 Diskussion

In der zweiten empirischen Untersuchung der vorliegenden Arbeit wurden die intuitiven Verknüpfungsregeln insgesamt dreimal erhoben (Baseline, Posttest 1, nach der Intervention, und Posttest 2, eine Woche später). Wiederum nahmen die Kinder beide Dimensionen, Länge und Breite, als eigenständige Informationen wahr und verknüpften sie mittels einer algebraischen Regel. Dabei zeigte sich eine additive oder eine multiplikative Verknüpfung der Stimulusdimensionen. Die durchschnittlichen Urteile der gesamten Altersgruppe ergaben in allen drei Erhebungen eine multiplikative Verknüpfung der Länge und Breite, wobei die Verteilung der individuellen Regeln unterschiedlich aussah. Der Anteil Kinder mit einer additiven Verknüpfungsregel betrug in der Baseline-Erhebung 76%, während 20% die Länge und Breite multiplikativ verknüpften und 4% keiner Regel zugeteilt werden konnten. Nach der Intervention wurde nur noch bei 58% der Kinder eine additive Verknüpfungsregel gefunden, 38% nahmen eine multiplikative Verknüpfung der Länge und Breite vor und 4% benutzten keine einheitliche Regel. Eine Woche später wurde noch bei 56% der Kinder ein additives Muster gefunden, bei 42% eine multiplikative Verknüpfungsregel und nur noch 2% der Versuchspersonen konnten keiner konsistenten Strategie zugeteilt werden. Die Verteilung der intuitiven Regeln nach der Intervention und die Verteilung aus der Erhebung eine Woche später waren sich sehr ähnlich. Eine Analyse der individuellen Veränderungen zeigte jedoch, dass daraus nicht auf eine stabile Verknüpfungsregel geschlossen werden kann. Zwischen der zweiten und dritten Erhebung der intuitiven Verknüpfungsregeln gab es sowohl Verbesserungen von additiv zu multiplikativ als auch Verschlechterungen von multiplikativ zu additiv. Auch wenn diese Verteilungen insgesamt ähnlich waren, so setzten sie sich nur teilweise aus den gleichen Versuchspersonen zusammen.

Die durchschnittlichen Schätzwerte der Rechteckflächen vor und nach der Intervention waren sich sehr ähnlich und lagen auf der Antwortskala nahe beieinander, wobei die Messwiederholungsdaten nach der Intervention etwas präziser ausfielen. Die intuitiven Urteile aus der Erhebung eine Woche später korrelierten weder mit den Schätzwerten der Baseline-Erhebung noch mit denjenigen aus dem Posttest 1. Der Grund dafür könnte sein, dass die ersten beiden Erhebungen am selben Tag, innerhalb einer halben Stunde, durchgeführt wurden und die Grösse der Stimuli den Versuchspersonen daher präsenter waren als eine Woche später. Die durchschnittlichen Urteile nach der Intervention und diejenigen des Posttests 2 waren dem umgerechneten linearen Mass der Rechteckflächen ähnlicher als die Schätzwerte der ersten Erhebung. Dies hängt, wie bereits in der Diskussion des ersten Experimentes erwähnt, höchstwahrscheinlich damit zusammen, dass bei jeder weiteren Durchführung der Rechteckflächenschätzung eine genauere Vorstellung der Grösse der zu beurteilenden Stimuli vorhanden war, wodurch die Urteile auf der Skala präziser gemacht werden konnten. Dieses exaktere Schätzen würde somit mit der im Rahmen der Assemblage-Theorie aufgestellten Annahme übereinstimmen, dass eine Vertrautheit des Stimulusmaterials für die intuitiven Urteile wichtig ist (Anderson & Wilkening, 1991). Entsprechend der Assemblage-Theorie sind die intuitiven Verknüpfungsregeln der Kinder keine reinen Konzepte, sondern Lösungsregeln, welche aufgrund verschiedener Fähigkeiten und Wissensformen zustande kommen. Eine Vertrautheit mit der Aufgabenstellung und dem Stimulusmaterial kann somit eine Veränderung der intuitiven Integrationsregel bewirken. Die starke Aufgabenabhängigkeit des intuitiven Wissens betonte bereits Janke (1995): je nach Präsentation der Aufgaben in ihrer Untersuchung zeigten sich Misskonzepte oder auch nicht. Die intuitiven Muster in der vorliegenden Untersuchung waren nicht sehr stabil. Dieser Befund spricht ebenfalls dafür, dass eine algebraische Regel keine Alles-oder-nichts-Wissensstruktur ist. Es handelt sich dabei um keine internalisierte Regel, sondern um eine Art Ad-hoc-Strategie, welche je nach Aufgabe, Erfahrung und Kontext abgerufen wird.

Ein Einfluss der benutzten Intervention auf die Regeländerung kann aufgrund der vorliegenden Ergebnisse ausgeschlossen werden. Auch innerhalb der Gruppe, welche ihre additive Regel zur multiplikativen verbesserte, waren alle vier Interventionen gleich verteilt: Die intuitiven Muster wurden somit nicht aufgrund des Lernens von Aufgaben zum Korrespondenzschema verbessert, und auch das Üben der Gitterstruktur zeigte keinen signifikanten Effekt auf die Verknüpfungsregeln. Sogar Kinder, welche der Kontrollgruppe angehörten, verbesserten teilweise ihre intuitive Verknüpfungsregel. Dies ist ein weiterer Hinweis dafür, dass die Kinder eher von der Wiederholung der Schätzaufgaben profitierten als vom Inhalt der durchgeführten Intervention. Es kann jedoch nicht vollständig ausgeschlossen werden, dass sich die intuitiven Muster durch explizite Instruktionen nicht beeinflussen lassen. Es wäre möglich, dass eine 10-minütige Intervention zu kurz war, um das Korrespondenzschema oder die Gitterstruktur zu erlernen.

In der Untersuchung von Wolf (1995), in welcher eine Änderung der intuitiven Verknüpfungsregeln bewirkt werden konnte, durften die Kinder jeweils haptisch mit dem grössten, mittleren und kleinsten Rechteck spielen. Aufgrund der vorliegenden Resultate könnte die Hypothese aufgestellt werden, dass nicht die haptische Aktivität, sondern das Wissen um die Grössen der Stimuli die Regeländerung ausmachte. Das vorgängige Kennenlernen des grössten, mittleren und kleinsten Rechtecks erleichterte es den Kindern, die Rechtecke innerhalb der Skala und somit zwischen den gegebenen Ankerpunkten genauer einzustufen. Es wäre daher interessant, experimentell zu prüfen, ob eine Regeländerung auch alleine durch die vorgängige visuelle Betrachtung der Stimuli erfolgen würde oder ob dazu die haptische Komponente nötig ist.

5 Allgemeine Diskussion

5.1 Intuitive Verknüpfungsregeln bei der Schätzung von Rechteckflächen

Die Erhebungen der individuellen Verknüpfungsregeln der zweiten empirischen Untersuchung lassen sich auf zwei Arten mit denjenigen aus der ersten Untersuchung vergleichen: Einerseits kann die Verteilung der intuitiven Verknüpfungsregeln aus beiden *ersten Erhebungen* miteinander verglichen werden, also *vor* der Einführung der Multiplikation in der ersten Untersuchung und *vor* der Intervention in der zweiten Untersuchung. Andererseits kann die Verteilung aus beiden *zweiten Erhebungen* miteinander verglichen werden, *nach* der Einführung der Multiplikation in der ersten Untersuchung und *nach* der Intervention in der zweiten Untersuchung[15]. Dabei ist jeweils zu beachten, dass bei der ersten empirischen Untersuchung ein 4x4-faktorielles Design (Länge x Breite) und bei der zweiten ein 3x3-Design verwendet wurde.

Was beim Vergleich der beiden ersten Erhebungen erstaunt, ist, dass in der Verteilung aus der ersten Untersuchung ein grösserer Anteil Kinder mit einem intuitiven multiplikativen Muster gefunden wurde als in der zweiten Untersuchung und dementsprechend auch weniger Kinder mit einer additiven Integrationsregel, dies, obwohl die Kinder der ersten Untersuchung durchschnittlich 8 Monate jünger waren. Es ist möglich, dass das unterschiedliche Design bei den beiden Erhebungen diesen Unterschied ausmachte. Ein Vergleich der beiden zweiten Erhebungen zeigte ein anderes Bild. Nach der Intervention in der zweiten Untersuchung gab es mehr Kinder mit einer multiplikativen Regel als bei der Stichprobe, welche nach der Einführung der Multiplikation untersucht wurde. Das wichtigste Ergebnis bei diesem Vergleich ist, dass in beiden Untersuchungen jeweils die zweiten Messungen eine Verbesserung der intuitiven Muster hervorbrachten. Daraus kann geschlossen werden, dass das Alter eine marginale Rolle spielte und vielmehr die Vertrautheit mit dem Material und mit der Aufgabe der wesentliche Faktor für die Verbesserung gewesen zu sein scheint. Auch die zeitliche Komponente spielte dabei eine Rolle: Je kurzfristiger die Wiederholung der Aufgabe erfolgte, desto grösser war dieser Effekt.

[15] Da sich die Verteilungen von Posttest 1 und Posttest 2 sehr ähnlich waren, wird bei diesem Vergleich nicht zwischen den beiden unterschieden.

5.2 Zusammenhang zwischen intuitiven Verknüpfungsregeln und numerischen Fähigkeiten

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, herauszufinden, ob die Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht eine Veränderung der intuitiven Verknüpfungsregeln bei der Schätzung von Rechteckflächen bewirkt und welcher Zusammenhang zwischen intuitiven Verknüpfungsregeln und dem numerischen multiplikativen Wissen besteht. Des Weiteren wurde untersucht, ob durch verschiedene Interventionen, welche sich auf das explizite Wissen der Multiplikation beziehen, eine Verbesserung der intuitiven Verknüpfungsregeln bewirkt werden kann.

Wie bereits vorgängig diskutiert (siehe Kapitel 3.4.2), zeigten die Resultate der ersten empirischen Untersuchung, dass Kinder mit einer intuitiven multiplikativen Verknüpfungsregel insgesamt bessere Leistungen beim Lösen der Multiplikationsaufgaben erbrachten als diejenigen mit einem additiven Muster. Dieser Unterschied zwischen den beiden Verknüpfungsregel-Gruppen zeigte sich am deutlichsten bei Aufgaben, welche das Erkennen einer Beziehung zwischen zwei Zahlen erforderten (Korrespondenzschema), und bei zeitlich-sukzessiven Aufgaben, welche bildhaft dargestellt waren. Beide Aufgabentypen waren den Kindern, im Unterschied zu den anderen Multiplikationsaufgaben, welche sie in dieser Untersuchung lösten, aus den Schulbüchern nicht bekannt. Des Weiteren wurde ein Unterschied bei den Lösungsstrategien gefunden. Kinder mit einer multiplikativen Verknüpfungsregel lösten Aufgaben, in welchen die Gesamtzahl der Punkte einer Fläche berechnet werden mussten (Punktefelder), signifikant häufiger, indem sie die Punkte der Länge und Breite zählten und diese dann miteinander multiplizierten. Sie erkannten die multiplikative Struktur in der Aufgabe und lösten sie daher direkt multiplikativ. Kinder mit einer additiven Verknüpfungsregel benutzten häufiger die Strategie der wiederholten Addition. Sie zählten die Punkte der Breite oder der Länge und addierten diese Reihen dann zusammen. Die besten Leistungen bei den Multiplikationsaufgaben zeigten Kinder, welche zu beiden Untersuchungszeitpunkten (vor und nach der Einführung der Multiplikation im schulischen Unterricht) eine multiplikative Integrationsregel verwendeten. Die Gruppe, welche ihr intuitives Muster von additiv zu multiplikativ veränderte, war besser als diejenige, die ihre intuitive Verknüpfungsregel von multiplikativ zu additiv verschlechterte, und die schlechtesten Leistungen zeigten Kinder, welche bei der Flächenschätzung beide Male eine additive Verknüpfungsregel verwendeten.

Aufgrund des Zusammenhangs, welcher zwischen den intuitiven Verknüpfungsregeln und den numerischen Fähigkeiten gefunden wurde, leitete sich die zweite empirische Untersuchung ab. In dieser wurde versucht, den Kindern mit einer kurzen Intervention wichtige Aspekte der Multiplikation beizubringen. Dabei lag das Schwergewicht auf der Vermittlung des Korrespondenzschemas sowie der Flächenstruktur. In Kapitel 4.4 wurde bereits ausführlich diskutiert, dass aufgrund des neu erworbenen numerischen Wissens keine Verbesserung des intuitiven Wissens bewirkt werden konnte. Die intuitiven Verknüpfungsregeln änderten sich zwar oft über die Messzeitpunkte hinweg, dies geschah jedoch unabhängig von der Intervention. Eine allfällige Verbesserung der intuitiven Verknüpfungsregeln erfolgte am ehesten aufgrund der Vertrautheit mit dem Stimulus-material und der Wiederholung der Aufgabe.

Die Ergebnisse der zweiten empirischen Untersuchung liefern weitere Hinweise über den Zusammenhang zwischen den intuitiven Verknüpfungsregeln und den numerischen multiplikativen Fähigkeiten, welcher in der ersten Untersuchung gefunden wurde. Aufgrund des Resultates, dass die intuitiven Regeln durch neu erworbenes multiplikatives Wissen nicht verändert wurden, kann die Hypothese aufgestellt werden, dass der Entwicklungsverlauf zwischen intuitivem und explizitem Wissen in diesem Bereich eher von intuitiv zu explizit verläuft. Dies würde mit Sun, Slusarz und Terry (2005) übereinstimmen. Sie gehen bei der Wissensaneignung ebenfalls von einem *bottom-up approach* aus, dass zuerst implizites und dann explizites Wissen angeeignet wird. Die Hypothese, welche aufgrund der Resultate der ersten Untersuchung aufgestellt wurde, dass bei vorhandenem richtigem intuitivem Wissen das neu erworbene numerische Wissen in unbekannten Situationen erfolgreicher angewendet werden kann, soll ebenfalls beibehalten werden. Dabei gilt: Je stabiler das intuitive Wissen ist, desto sicherer wird auch das numerische Wissen angewendet.

6 Ausblick auf weitere Untersuchungen

Mit der vorliegenden Untersuchung konnten Hinweise zur Klärung der Fragestellungen gefunden werden, es bleiben jedoch auch einige Fragen offen. Aufgrund der Resultate wurden zahlreiche Hypothesen aufgestellt, welche in zukünftigen Untersuchungen einer Überprüfung unterzogen werden müssten.

Zum Zusammenhang, welcher zwischen den intuitiven Verknüpfungsregeln und den numerischen Fähigkeiten gefunden wurde, stellt sich die Frage, inwiefern dieses Resultat generalisiert werden kann. Dazu müsste die vorliegende Untersuchung durch weitere Aufgabentypen oder durch einen standardisierten Mathematiktest erweitert werden. Die Aufgaben zum Korrespondenzschema sollten in einer weiteren Untersuchung so gewählt werden, dass klar unterschieden werden kann, ob sie auf dem Weg der wiederholten Addition oder direkt multiplikativ gelöst wurden. Dadurch könnte differenziert werden, welche Kinder die konstante Beziehung in den Aufgaben erkennen und welche nicht. Mit weiteren, den Kindern unbekannten Aufgabentypen könnte die Hypothese überprüft werden, dass das erlernte numerische Wissen in Bezug auf unbekannte Aufgaben besser angewendet werden kann, wenn das intuitive Wissen dazu vorhanden ist. Dabei wäre es auch hier wichtig, dass aufgrund der Lösungen unterschieden werden kann, ob die multiplikative Struktur im der Aufgabe erkannt wurde.

Aufgrund der vorliegenden Resultate wären weitere Untersuchungen zum Zusammenhang zwischen dem Vorwissen zu einem bestimmten Thema und den intuitiven Verknüpfungsregeln bzw. der Veränderung der intuitiven Muster sinnvoll. Das Vorwissen in dieser Untersuchung schien ein Faktor für die Wissbegierde eines Kindes oder seine Förderung durch das Elternhaus zu sein, was beides schwierig zu messen ist. Stattdessen könnte z.B. ein standardisierter Intelligenztest verwendet werden. Einen Zusammenhang zwischen proportionalem Denken und Intelligenz konnte bereits Hart (1981) zeigen.

Durch explizite Instruktionen und Übungen in Form verschiedener 10-minütiger Interventionen konnte in der vorliegenden Untersuchung keine Regeländerung bewirkt werden. Rümmele (1993) knüpfte in ihrer Trainingsstudie die Instruktionen jeweils an den Entwicklungsstand der Kinder an, wodurch sich die Integrationsregeln teilweise verbesserten. Es stellt sich somit die Frage, ob ein Training mit Anknüpfung an das Vorwissen der Kinder eine Regeländerung bewirken könnte. Dies wäre z.B. bei Aufgaben zum Korrespondenzschema möglich, indem vorgängig die Lösungsstrategie ermittelt und danach ein darauf aufbauendes Training durchgeführt würde. Sun, Slusarz und Terry (2005) gehen davon aus, dass implizites Lernen durch Verbalisierung verbessert werden kann. Daher könnten in einem weiteren Schritt die verbalen Urteile der Kinder bezüglich des expliziten Wissens trainiert werden. Die Ergebnisse würden weitere Hinweise liefern, ob der Entwicklungsverlauf im Bereich der Rechteckflächenschätzung tatsächlich von intuitiv zu explizit verläuft und ob das intuitive Wissen durch Instruktion verbessert werden kann oder nicht.

7 Exkurs: Implikationen für den Schulunterricht

Bei den Implikationen für den schulischen Unterricht ist zu beachten, dass sie aufgrund von Theorien und nicht von Erfahrungswerten abgeleitet wurden. Ausserdem muss an dieser Stelle erwähnt werden, dass deren Umsetzung voraussetzt, dass eine Lehrperson Zeit für die Beobachtung der einzelnen Kinder hat, um deren Leistungsstand zu ermitteln. Sie sind somit eher für einen individualisierten Unterricht gedacht.

Im Sinne des konstruktivistischen Lernens ist es wichtig, dass Kinder die Lerninhalte wirklich verstehen und dass sie nicht nur den von der Lehrperson vorgegebenen Inhalt auswendig lernen. Der eigene aktive Konstruktionsprozess eines Kindes scheint wesentlich für ein fundiertes Wissen zu sein. Dessen ist sich jedoch die Mathematik-Didaktik bewusst; die Lernumgebungen sind heutzutage nicht mehr geprägt durch das Vermitteln von explizitem Wissen. Bezüglich der Multiplikation ist man sich einig, dass sie mehr als das Auswendiglernen der einzelnen Reihen umfasst und somit auch in verschiedenen Kontexten gelernt werden sollte.

In der bearbeiteten Theorie wurde oft betont, wie wichtig es ist, die impliziten Modelle der Kinder zu beachten. Tirosh und Graeber (1994) begründen dies folgendermassen: “If learning is the result of interaction between what the student is taught and his existing concepts, then understanding these concepts is essential for improving science and mathematics education” (S. 111). Während Fischbein et al. (1985) von einem einzigen impliziten Modell, dem der wiederholten Addition, ausgehen, existieren nach Mulligan und Mitchelmore (1997) drei intuitive Modelle mit jeweils einer dazugehörigen Gruppe von Kalkulationsstrategien. Da sich die impliziten Modelle anhand der Lösungsstrategien zeigen, wäre es wichtig, die Kinder die Aufgaben auf ihre eigene Art lösen zu lassen. Anhand der Verwendung des impliziten Modells könnte die Lehrperson ermitteln, auf welchem Wissensstand sich das Kind befindet, und auf dieser Grundlage helfen, das Verständnis weiter aufzubauen. Da die intuitiven Modelle oft für Fehler verantwortlich sind, welche nach Fischbein et al. (1985) durch das Erlernen des expliziten Wissens nicht automatisch verschwinden, ist es sinnvoll, diese Modelle in die didaktisch-methodischen Überlegungen miteinzubeziehen.

Aufgrund der vorliegenden Resultate müsste vermehrt Wert auf das proportionale Denken oder zumindest auf das Erkennen eines konstanten Verhältnisses zwischen zwei Zahlen gelegt werden. Aufgaben zum Korrespondenzschema werden in den Schulbüchern der zweiten Klassen nicht explizit behandelt. Erst ab der fünften Klasse werden Aufgaben eingeführt, in welchen die konstante Beziehung zwischen zwei Quantitäten erkannt werden muss. Es wäre jedoch sinnvoll, wenn der Fokus der Multiplikation auf der Unterstufe nicht nur auf zeitlich-sukzessive oder räumlich-simultane Aufgaben gelegt würde. So wäre es möglich, bereits einfache Aufgaben zu behandeln, welche das Korrespondenzschema beinhalten und welche nicht über das Zusammenzählen von gleichen Einheiten gelöst werden können. Dies würde den Kindern helfen, ein multiplikatives Verständnis aufzubauen. Ein weiterer wichtiger Punkt wird oft anhand von Malle (2004) zitiert:

> Der wahrscheinlich grösste Fehler des traditionellen Mathematikunterrichts besteht darin, dass zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufgestiegen wird, bevor noch ausreichende intuitive und anschauliche Vorstellungen vom jeweiligen Stoff erworben wurden. Diesen Fehler kann man an fast allen Stoffgebieten der Schulmathematik beobachten. (S. 4)

Es geht in diesem Punkt somit um die visuellen Vorstellungen der Kinder. Auch Mulligan und Mitchelmore (1997) finden die Vermittlung von Lösungswegen wichtig, erachten es jedoch als effizienter, Visualisation oder arithmetische Symbole als konkrete Modelle zu benutzen. Thomas, Mulligan und Goldin (2002) konnten zeigen, dass mentale Repräsentationen von mathematisch begabten Kindern dynamisch bildhaft waren, während mathematisch schwächere Kinder oft statische Repräsentationen ohne klar erkennbare Struktur zeigten. Die mathematischen Leistungen scheinen somit mit der Wahrnehmung von mathematischen Strukturen zu tun zu haben. Mulligan et al. (2005) sehen dies nicht als Charakteristik für die Mathematikleistungen oder gute und leistungsschwache Schülerinnen und Schüler, sondern eher als Schlüssel, um Schwierigkeiten im mathematischen Lernen vorzubeugen. Confrey und Smith (1995) erachten die Verbindung der Mathematik mit der Geometrie von fundamentaler Wichtigkeit, was dafür sprechen würde, dass man Geometrie in den frühen Schuljahren vermehrt einbezieht. Dass sich Rechteckflächen gut eignen, um den Unterschied zwischen additiven und multiplikativen Vergrösserungen zu erkennen, wurde oft erwähnt (vgl. Battista, et al., 1998; Huang & Witz, 2011). Auch werden bei der Rechteckfläche numerische Quantitäten mit geometrischen Merkmalen verbunden. Die geometrischen Attribute der Rechtecke sowie die Flächenformel werden gemäss dem Lehrplan[16] des Kantons Zürich jedoch erst in der Mittelstufe (ab 4. Klasse) eingeführt. Die Wichtigkeit von konkreten Materialien bei der Einführung von neuen Konzepten betonen McNeil und Uttal (2009). Sie gehen davon aus, dass neue Fähigkeiten nur durch das Experimentieren mit den Materialien, durch eigene Handlung und durch gezielte Beobachtung entwickelt werden. Nunes und Bryant (1998) zeigten in ihrer Untersuchung zur Flächenschätzung, dass die verfügbaren Materialien zum Bearbeiten einer Aufgabe einen signifikanten Einfluss auf das Denken der Kinder haben. Sie untersuchten 8- bis 11-jährige Kinder, wobei die eine Gruppe einen Massstab, die zweite Holzklötze und die dritte keine Hilfsmittel bekam. Die Gruppe mit den Klötzen war signifikant erfolgreicher als diejenige mit dem Massstab. Es scheint somit für die jeweiligen Problemstellungen wichtig, sich gut zu überlegen, welche Materialien den Kindern zur Verfügung gestellt werden.

[16] www.vsa.zh.ch

8 Literatur

Ahl, V. A., Moore, C. F., & Dixon, J. A. (1992). Development of intuitive and numerical proportional reasoning. *Cognitive Development*, *7*, 81-108.

Anderson, N. H. (1981). *Foundations of information integration theory.* New York: Academic Press.

Anderson, N. H. (1996). *A functional theory of cognition*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Anderson, N. H., & Cuneo, D. O. (1978). The height + width rule in children's judgments of quantity. *Journal of Experimental Psychology: General*, *107,* 335-378.

Anderson, N. H., & Wilkening, F. (1991). Adaptive thinking in intuitive physics. In N. H. Anderson (Ed.)*, Contributions to information integration theory* (pp. 1-42). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 367-385.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. V. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education, 29,* 503-532.

Büssing, A., Herbig, B., & Latzel, A. (2004). Explikation impliziten Wissens - Verändert sich das Handeln? *Zeitschrift für Psychologie, 212*, 87-106.

Campbell, J. I. D., & Graham, D. J. (1985). Mental multiplication skill - Structure, process and acquisition. *Canadian Journal of Psychology, 39,* 338-366.

Clark, F. B., & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 41-51.

Confrey, J. (1994). Splitting, similarity, and rate of change: A new approach to multiplication and exponential functions. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning* (pp. 291-330). Albany: State University of New York Press.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 66-86.

Cuneo, D. O. (1980). A general strategy for quantity judgments - the height + width rule. *Child Development*, *51*, 299-301.

De Brauwer, J., & Fias, W. (2009). A longitudinal study of children's performance on simple multiplication and division problems. *Developmental Psychology, 45*, 1480-1496.

De Brauwer, J., Verguts, T., & Fias, W. (2006). The representation of multiplication facts: Developmental changes in the problem size, five, and tie effects. *Journal of Experimental Child Psychology, 94*, 43-56.

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior*. New York: Plenum.

Ebersbach, M., & Resing, W. C. M. (2008). Implicit and explicit knowledge of linear and exponential growth in 5- and 9-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 9*, 286-309.

Ebersbach, M., & Wilkening, F. (2007). Children's intuitive mathematics: The development of knowledge about nonlinear growth. *Child Development, 78*, 296-308.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education 16*, 3-17.

Frydman, O., & Bryant, P. (1988). Sharing and the understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development, 3*, 323-339.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation *Cognition, 44*, 43-74.

Gottfried, A. E. (1990). Academic intrinsic motivation in young elementary school children. *Journal of Educational Psychology, 82*, 525-538.

Hart, K. M. (1981). *Children's Understanding of Mathematics: 11 - 16*. London: John Murray.

Hohl, W., Bärtschi, V., & Mühlemann, R. (2004). *Mathematik 2, Primarschule*. Kanton Zürich: Lehrmittelverlag.

Huang, H. M. E. (2010). The Relationships between children's comprehension of multiplication and their understanding of perimeters and area measurement of rectangles. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-120). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Huang, H. M. E., & Witz, K. G. (2011). Developing children's conceptual understanding of area measurement: A curriculum and teaching experiment. *Learning and Instruction, 21*, 1-13.

Janke, B. (1995). Entwicklung naiven Wissens über den physikalischen Auftrieb: Warum schwimmen Schiffe? *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 27*, 122-138.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E., K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-86). New York: American Press, Inc.

Koshmider, J. W., & Ashcraft, M. H. (1991). The development of childrens mental multiplication skills. *Journal of Experimental Child Psychology, 51*, 53-89.

Kouba, V. L. (1989). Childrens solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 147-158.

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. München: Elsevier GmbH.

Krist, H., Fieberg, E. L., & Wilkening, F. (1993). Intuitive physics in action and judgment - The development of knowledge about projectile motion. *Journal of Experimental Psychology-Learning Memory and Cognition, 19*, 952-966.

Leon, M. (1982). Extent, multiplying, and proportionality rules in childrens judgments of area. *Journal of Experimental Child Psychology, 33*, 124-141.

Lorenz, J. H., & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren, 123*, 4-8.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education* London and New York: RoutledgeFalmer.

McCrink, K., & Spelke, E. S. (2010). Core multiplication in childhood. *Cognition, 116*, 204-216.

McNeil, N. M., & Uttal, D. H. (2009). Rethinking the use of concrete materials in learning: Perspectives from development and education. *Child Development Perspectives, 3*, 137-139.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche/Dyskalkulie, Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Bern: Haupt.

Moser Opitz, E., Berger, D., & Reusser, L. (2008). BESMath, Screening zum Erfassen von Schülerinnen und Schülern mit schwachen Mathematikleistungen. Verfügbar unter http://www.erz.be.ch/besmath

Mulligan, J. T. (2002). The role of structure in children's development of multiplicative reasoning. In K. C. I. B. Barton, M. Pfannkuch & M. O. J. Thomas (Eds.), *Pme 25. Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 497-503). Auckland, Sydney: MERGA.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 309-330.

Mulligan, J. T., Mitchelmore, M. C., & Prescott, A. (2005). Case studies of children's development of structure in early mathematics: a two-year longitudinal study. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Pme 29: Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-8). Melburn: PME.

Mulligan, J. T., Mitchelmore, M. C., & Prescott, A. (2006). Integrating concepts and processes in early mathematics: The australian pattern and structure mathematics awareness project (PASMAP). In J. Novotná, H. Moraová, M.Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Pme 30: Proceedings of the 30rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 209-216). Prague: PME.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 19-40). Reston, VA: The National Council of Mathematics.

Nunes, T., & Bryant, P. (1998). *Children doing mathematics*. Mlden: Blackwell Publishers Inc.

Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Oehl, W. (1962). *Der Rechenunterricht in der Grundschule (Zweites bis viertes Schuljahr)*. Hannover: Hermann Schroedel Verlag KG.

Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*, 144-167.

Park, J. H., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, *16*, 763-773.

Piaget, J. (1975). *Die Entwicklung des Erkennens I. Das mathematische Denken.* Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Piaget, J. (1985). *Meine Theorie der geistigen Entwicklung*. Frankfurt a. M.: Fischer.

Piaget, J. (1987). *Possibility and necessity*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *Die Entwicklung der physikalischen Mengenbegriffe beim Kinde: Erhaltung und Atomismus*. Stuttgart: Klett.

Piaget, J., & Szeminska, A. (1975). *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Polanyi, M. (1985). *Implizites Wissen*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R., & Ebeling, A. (1998). *Handbuch für den Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel Verlag GmbH.

Reber, A. S. (1989). Implicit learning and tacit knowledge. *Journal of Experimental Psychology-General, 118*, 219-235.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44*, 162-169.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantitaties to operators. Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-430). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Rulence-Paques, P., & Mullet, E. (1998). Area judgment from width and height information: The case of the rectangle. *Journal of Experimental Child Psychology, 69*, 22-48.

Rümmele, A. (1993). *Entwicklung des Flächenkonzepts: Eine Trainingsstudie*. Münster: Waxmann Verlag GmbH.

Ruwisch, S. (2001). Multiplikative Vorstellungen von Viert- und Sechstklässlern im Bereich natürlicher sowie Bruchzahlen. Zeichnerische und verbal-schriftliche Äusserungen. In W. Weiser & B. Wollring (Eds.), *Schriftenreihe: Studien zur Schulpädagogik. Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primärstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt* (pp. 173-187). Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

Scherer, P. (2009). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern, Band 3: Multiplikation und Division im Hunderterraum*. Buxtehude: Persen Verlag GmbH.

Selter, C. (1994). Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Grundschule. Verfügbar unter http://pikas.mathematik.tu-dortmund.de/selter/upload/material/EP-AU.komplett.pdf

Sera, M. D., Troyer, D., & Smith, L. B. (1988). What do two-year-olds know about the sizes of things? *Child Development, 59*, 1489-1496.

Silverman, I. W., & Paskewitz, S. L. (1988). Developmental and individual-differences in childrens area judgment rules. *Journal of Experimental Child Psychology, 46*, 74-87.

Silvestre, A. I., & da Ponte, J. P. (2011). Missing value and comparison problems: What pupils know before the teaching of proportion. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 185-192). Ankara, Turkey: PME.

Singer, J. A., Kohn, A. S., & Resnick, L. B. (1997). *Knowing about proportions in different contexts*. Sussex: Psychology Press Ltd.

Sophian, C. (2000). Perceptions of proportionality in young children: Matching spatial ratios. *Cognition, 75*, 145-170.

Steffe, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences, 4*, 259-309.

Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3-40). Albany: State University of New York press.

Sun, R., Slusarz, P., & Terry, C. (2005). The interaction of the explicit and the implicit in skill learning: A dual-process approach. *Psychological Review, 112*, 159-192.

Thomas, N. D., Mulligan, J. T., & Goldin, G. A. (2002). Children's representations and structural development of the counting sequence 1 -100. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 117-133.

Tirosh, D., & Graeber, A. O. (1994). Implicit and explicit knowledge: The case of multiplication and division. In D. Tirosh (Ed.), *Implicit and explicit knowledge: an educational approach* (pp. 111-130). Norwood, NJ: Ablex.

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational studies in mathematics, 4*, 401-412.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

Van Zuijen, T. L., Simoens, V. L., Paavilainen, P., Naatanen, R., & Tervaniemi, M. (2006). Implicit, intuitive, and explicit knowledge of abstract regularities in a sound sequence: An event-related brain potential study. *Journal of Cognitive Neuroscience, 18*, 1292-1303.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Weiss, D. J. (2006). *Analysis of Variance and Functional Measurement. A practical Guide*. Oxford: University Press.

White, R. W. (1959). Motivation reconsidered: The concept of competence *Psychological Review, 66*, 297-333.

Wilkening, F. (1978). Beachtung und Addition zweier Dimensionen: Eine Alternative zu Piagets Zentrierungsannahme. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 10*, 99-102.

Wilkening, F. (1979). Combining of stimulus dimensions in childrens and adults judgments of area - Information Integration analysis. *Developmental Psychology, 15*, 25-33.

Wilkening, F. (1981). Integrating velocity, time, and distance information: A developmental study. *Cognitive Psychology, 13*, 231-247.

Wilkening, F. (1989). Adaptives Denken von Kindern: Neue Aufgaben in der kognitiven Entwicklung. In W. Schönpflug (Ed.), *Bericht über den 36. Kongress der Deutschen Gesellschaft für Psychologie, Berlin 1988*. Göttingen: Hogrefe.

Wilkening, F., Becker, J., & Trabasso, T. (1980). *Information integration by children*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Wilkening, F., Schwarzer, G., & Rümmele, A. (1997). The developmental emergence of multiplicative combinations. In T. B. Ward, S. M. Smith & J. Vaid (Eds.), *Conceptual structures and processes: Emergence, discovery, and change* (pp. 111-127). Washington: APA.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Stuttgart: Klett Schulbuchverlag.

Wolf, Y. (1995). Estimation of euclidian quantity by 5-year-old and 6-year-old children: Facilitating a multiplication rule. *Journal of Experimental Child Psychology, 59,* 49-75.

Danksagung

Ein grosser Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Friedrich Wilkening für die Möglichkeit, als letzte Assistentin und Doktorandin vor seiner Emeritierung am Lehrstuhl Allgemeine und Entwicklungspsychologie mitzuarbeiten. Er liess mich meine eigenen Ideen verwirklichen, schenkte mir dabei sein Vertrauen und unterstützte mich in seiner grosszügigen Art.

Es hat mich sehr gefreut, dass sich Frau Prof. Dr. Elisabeth Moser Opitz bereit erklärt hat, bei dieser Arbeit als Zweitgutachterin mitzuwirken.

Ohne die Mitarbeit der Lehrpersonen und den Kindern ihrer Schulklassen wäre die vorliegende Untersuchung nicht zustande gekommen.

Bei der Erhebung der Daten und der Rekrutierung innerhalb der Schulhäuser haben mir Sarah Gadient, Nicole Kruger, Edith Stocker und Anai Fernandez tatkräftig geholfen.

Simone Schaub, Jan Rauch, Marcello Indino und Wenke Möhring vom Lehrstuhl Allgemeine und Entwicklungspsychologie haben mich fachlich, durch konstruktive Diskussionen und auch sozial sehr bereichert.

Meine Familie hat mich während der ganzen Studienzeit unterstützt. Mein Vater, Peter Schär, hat die vorliegende Arbeit sorgfältig lektoriert.

Nicht zu vergessen meine Freundinnen, welche immer ein offenes Ohr für mich hatten.

Ihnen und allen anderen Personen, die mich unterstützt und somit am Prozess und am Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, an dieser Stelle,

ein herzliches Dankeschön!

Anhang

Anhang 1 – Mathematikaufgaben 1

$2 \cdot 1 = \square$

$10 \cdot 9 = \square$

$3 \cdot 5 = \square$

$9 \cdot 8 = \square$

$5 \cdot 2 = \square$

$7 \cdot 4 = \square$

$6 \cdot 3 = \square$

$4 \cdot 6 = \square$

$8 \cdot 7 = \square$

$1 \cdot 10 = \square$

Anhang 2 – Mathematikaufgaben 2

1) Malaufgaben finden *(A)*

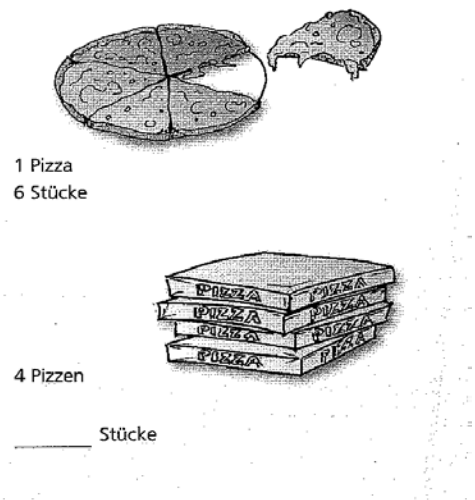
Beispiel: 12	2 • 6 = 12 3 • 4 = 12

40	
24	

---

2) Pizza-Aufgabe *(B: Korrespondenzschema)*

Hier siehst du eine Pizza, welche in 6 Stücke geschnitten ist. In den 4 Schachteln sind ebenfalls zerschnittene Pizzen. Wie viele Pizzastücke hat es in allen Schachteln?

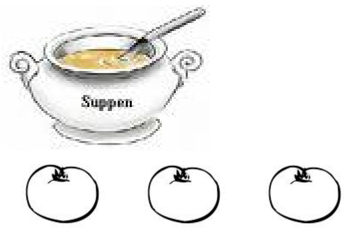


---

3) Suppen-Aufgabe *(B: Korrespondenzschema)*

Andrea kocht Suppe und braucht pro Topf 3 Tomaten. Wie viele Tomaten braucht sie für 3 Töpfe mit Suppe?

1 Topf Suppe
3 Tomaten



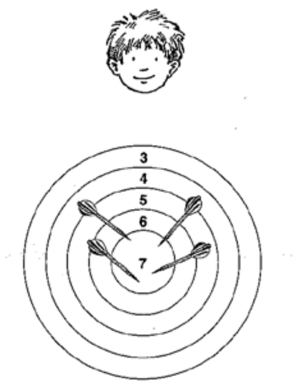
3 Töpfe Suppe

_____ Tomaten

---

4) Pfeilwerfen *(C: zeitlich-sukzessiv mit bildhafter Darstellung)*

Dieses Kind hat Pfeilwerfen gespielt und ein paar Pfeile haben das Brett getroffen. Wie viele Punkte hat es insgesamt gesammelt?



Wie heisst die dazugehörige Rechnung?

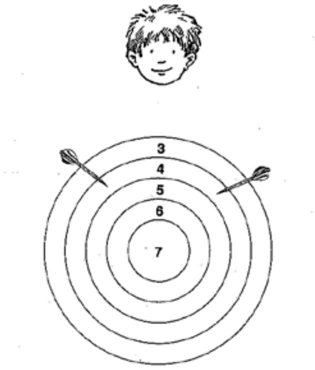
____

Wie lautet das Ergebnis? ___________

---

5) Pfeilwerfen ***(C: zeitlich-sukzessiv mit bildhafter Darstellung)***

Dieses Kind hat Pfeilwerfen gespielt und ein paar Pfeile haben das Brett getroffen. Wie viele Punkte hat es insgesamt gesammelt?



Wie heisst die dazugehörige Rechnung?

____

Wie lautet das Ergebnis? ___________

---

6) Berta fasst 5-mal in einen Sack und holt jeweils 4 Kastanien heraus. Wie viele Kastanien waren insgesamt im Sack?

(D: zeitlich-sukzessiv mit symbolischer Darstellung)

__________ Kastanien

---

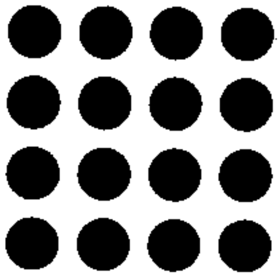
7) Gustav geht 3-mal in den Keller und holt jeweils 5 Flaschen herauf. Wie viele Flaschen hat er insgesamt heraufgeholt?

(D: zeitlich-sukzessiv mit symbolischer Darstellung)

__________ Flaschen

---

8) Punktfeld ***(E: räumlich-simultan mit bildhafter Darstellung)***

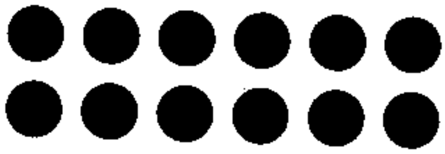


Wie heisst die dazugehörige Rechnung? ____________________

Wie lautet das Ergebnis? ___________

---

9) Punktfeld ***(E: räumlich-simultan mit bildhafter Darstellung)***



Wie heisst die dazugehörige Rechnung? ____________________

Wie lautet das Ergebnis? ___________

---

10) Auf einem Tisch stehen 2 Teller mit je 5 Keksen. Wie viele Kekse sind insgesamt auf dem Tisch? ***(F: räumlich-simultan mit symbolischer Darstellung)***

__________ Kekse

---

11) In einem Schulzimmer stehen 6 Tische, an jedem können 3 Kinder sitzen. Wie viele Kinder sind insgesamt im Schulzimmer? ***(F: räumlich-simultan mit symbolischer Darstellung)***

__________ Kinder

Anhang 3 – Protokollblatt

A) Zählen in 4er-Schritten

Kannst du einmal in 4er-Schritten zählen? Hilfestellung 1 „4er-Reihe“, Weitere Hilfestellung: 4,8,12…

Wie wurde gezählt?

O mit den Fingern / O ohne Finger
O einzelnes Zählen
O rhythmisches Zählen
O auswendig / Multiplikation

Beobachtungen:

1) Malaufgaben finden

Hier siehst du die Zahl 12 als Ergebnis einer Malrechnung (darauf zeigen). Dazu sind zwei passende Malrechnungen aufgeschrieben: 2 x 6 ergibt 12, 3 x 4 gibt auch 12. Finde für die Zahlen 40 und 24 auch je zwei passende Malrechnungen.

Beobachtungen:

2) Pizza-Aufgabe

Aufgabe vorlesen.
Hilfestellung: Wenn die Schülerin/der Schüler die Aufgabe nicht versteht: “Hier siehst du eine Pizza, welche in sechs Stücke geschnitten ist (auf Pizza zeigen). In diesen vier Schachteln (auf Schachteln zeigen) sind ebenfalls zerschnittene Pizzen. Du sollst nun herausfinden, wie viele Pizzastücke es in allen Schachteln zusammen hat.

Beobachtungen:

3) Suppen-Aufgabe

Aufgabe vorlesen.
Hilfestellung: Wenn die Schülerin/der Schüler die Aufgabe nicht versteht: "Hier siehst du einen Suppentopf. Um eine Suppe zu kochen, benötigt man 3 Tomaten (auf Tomaten zeigen). In diesen drei Töpfen (auf Töpfe zeigen) ist ebenfalls Suppe drin. Du sollst nun herausfinden, wie viele Tomaten es in allen Töpfen zusammen hat.

Beobachtungen:

---

4) Pfeilwerfen 1

Aufgabe vorlesen.
Hilfestellung: Stell dir vor, wir würden jetzt so ein Spiel machen. Du wirfst die Pfeile an diese Wand. Jeder Pfeil gibt Punkte, je nachdem wo er auf dem Brett landet. Z.B. dieser Ring gibt 3 Punkte.

Beobachtungen:

---

5) Pfeilwerfen 2

Aufgabe vorlesen.
Hilfestellung: Stell dir vor, wir würden jetzt so ein Spiel machen. Du wirfst die Pfeile an diese Wand. Jeder Pfeil gibt Punkte, je nachdem wo er auf dem Brett landet. Z.B. dieser Ring gibt 3 Punkte.

Beobachtungen:

---

6) Kastanien

Aufgabe vorlesen.

Beobachtungen:

---

7) Flaschen

Aufgabe vorlesen.

Beobachtungen:

---

8) Punktefeld 1

Welche Malrechnung passt zu diesem Punktefeld? Schreibe sie mit dem Resultat auf die Linie.

Hilfestellung: Wenn die Schülerin/der Schüler die Aufgabe nicht versteht: „ Wie kannst du herausfinden, wie viele Punkte es hat, ohne dass du alle einzeln zählen musst? Wie heisst die Rechnung dazu?“

Beobachtungen:

O einzeln abzählen

O Länge x Breite

O Addition 4er-Block

O Addition 6er-Block

O Addition 8er-Block

---

9) Punktefeld 2

Welche Malrechnung passt zu diesem Punktefeld? Schreibe sie mit dem Resultat auf die Linie.

Hilfestellung: Wenn die Schülerin, der Schüler die Aufgabe nicht versteht: „ Wie kannst du herausfinden, wie viele Punkte es hat, ohne dass du alle einzeln zählen musst? Wie heisst die Rechnung dazu?“

Beobachtungen:

O einzeln abzählen

O Länge x Breite

O Addition 4er-Block

O Addition 6er-Block

O Addition 8er-Block

---

10) Kekse

Aufgabe vorlesen.

Beobachtungen:

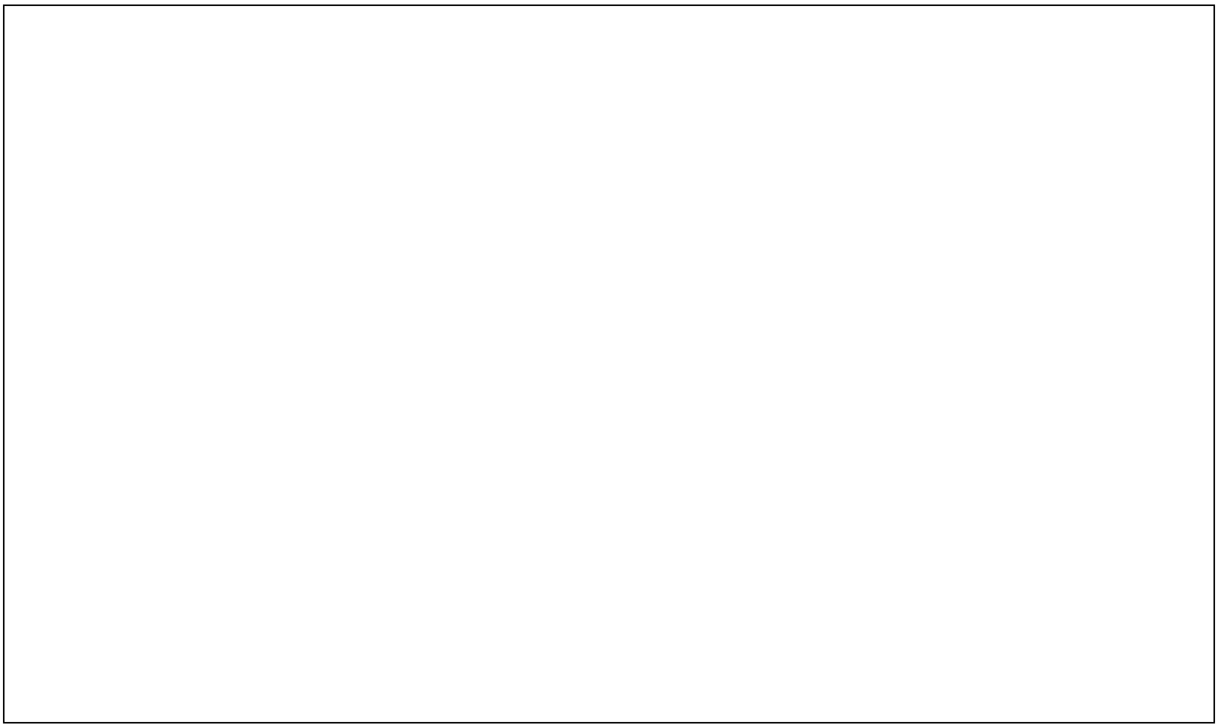
---

11) Schulzimmer-Tische

Aufgabe vorlesen.

Beobachtungen:

Anhang 4 – Intervention: Gitterstruktur



Wie viele Quadrate sind in dem Rechteck? _______________

Wie zählt man sie am schnellsten? ____________________

Wie könnte die Rechnung dazu heissen? _________________

Anhang 5 – Intervention: Korrespondenzschema

1) Suppen-Aufgabe

Andrea kocht Suppe und braucht pro Topf 3 Tomaten. Wie viele Tomaten braucht sie für 3 Töpfe mit Suppe?

1 Topf Suppe

3 Tomaten

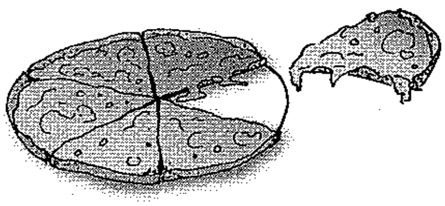
3 Töpfe Suppe

_____ Tomaten

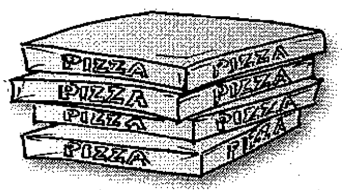
---

2) Pizza-Aufgabe

Hier siehst du eine Pizza, welche in 6 Stücke geschnitten ist. In den 4 Schachteln sind ebenfalls zerschnittene Pizzen. Wie viele Pizzastücke hat es in allen Schachteln?



1 Pizza
6 Stücke



4 Pizzen

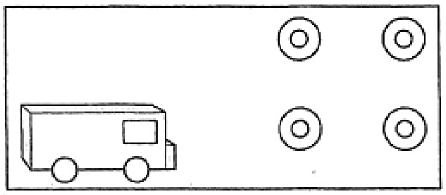
________ Stücke

---

3) Auto-Aufgabe

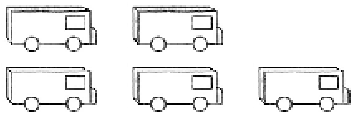
1 Auto

4 Räder



5 Autos

_____ Räder



---

4) Annes Mutter geht Geschenke kaufen. Sie kauft 7 Geschenke für ihre Kinder. In jedem Geschenk sind 2 Spielzeuge drin. Wie viele Spielzeuge hat sie insgesamt gekauft?

---

5) Im Garten stehen 4 Vogelhäuser. In jedem Vogelhaus wohnen 4 Vögel. Wie viele Vögel hat es im Garten?

---

6) 7 Kinder spielen ein Würfelspiel. Jedes Kind hat 3 Würfel. Wie viele Würfel haben alle zusammen?

---

7) 6 Freunde gehen an ein Konzert. 2 Kinder zahlen zusammen 5 Franken Eintritt. Wie viel bezahlen alle zusammen?

---

8) 6 Kinder spielen ein Kartenspiel. 3 Kinder haben zusammen 5 Karten. Wie viele Karten haben alle zusammen?

9) 8 Kinder kaufen zusammen Süssigkeiten. 2 Kinder haben zusammen 3 Bonbons. Wie viele Bonbons haben alle zusammen?

10) Erfinde selber eine Aufgabe*:*

Anhang 6 – Intervention: Malaufgaben finden

Beispiel: 12	2 • 6 = 12, 3 • 4 = 12

40	
24	
20	
18	
30	
16	
50	
36	
60	
42	